SYSTÈMES DE RACINES DES ALGÈBRES DE LIE CLASSIQUES COMPACTES

On note : $T_n = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} ; \ \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R} \right\}$.

Cas de $su(n)$ ("type A_{n-1}")

On utilise $(A \mid B) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{tr}(A^* B)$ et $T \overset{\text{déf}}{=} T_n \cap SU(n)$.

Donc $\Big\| \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{H} \Big\|^2 = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2$ quand $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in i\mathbb{R}$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$.

On a : $su(n) = t \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq r < s \leq n} \left\{ \begin{array}{c|cc} & r & s \\ \hline r & & -\bar{z} \\ s & z & \end{array} ; \ z \in \mathbb{C} \right\} \right)$

et $\operatorname{Ad}(\exp H) . \begin{pmatrix} & -\bar{z} \\ z & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\bar{z}' \\ z' & \end{pmatrix}$ avec $z' = e^{\lambda_s - \lambda_r} z$ (rotation de v.p. $e^{\lambda_r - \lambda_s}$ et $e^{\lambda_s - \lambda_r}$)

Donc : $R = \{ \lambda_r - \lambda_s \ ; \ r \neq s \}$ et $H_{\lambda_r - \lambda_s} = \underbrace{i \times}_{\substack{\text{action dans } t_{\mathbb{C}} \\ \overset{\text{can}}{\simeq} \text{ produit dans } M(n,\mathbb{C})}} \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} r & \quad s \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -i & & & \\ & & & 0 \ \ddots \ 0 & & \\ & & & & i & \\ & & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} \end{array}$.

$\left[\mathfrak{S}_n \overset{\text{gr}}{\simeq} W \text{ par } \sigma . \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma^{-1}(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} \text{ donc } \underset{\text{transposition}}{(r \ s)} \overset{\text{can}}{=} \operatorname{Ad} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}_{\!\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}} . \right]$

Cas de $sp(n) \subseteq su(2n)$ ("type C_n")

On utilise $(A \mid B) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^* B)$ et $T \overset{\text{déf}}{=} [T_n]_{\mathbb{C}}$,

où $[A + jB]_{\mathbb{C}} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}$ pour $A, B \in M(n, \mathbb{C})$.

Donc $\Big\| \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}}}_{H} \Big\|^2 = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2$ quand $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in i\mathbb{R}$.

On a : $sp(n) = t \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq r < s \leq n} \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} r & s \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} & \left[\begin{pmatrix} & -\bar{z} \\ z & \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \end{array} ; \ z \in \mathbb{C} \right\} \right) \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq r \leq s \leq n} \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} r & s \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} & \left[\begin{pmatrix} & jz \\ jz & \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \end{array} ; \ z \in \mathbb{C} \right\} \right)$

et $\left| \begin{array}{l} \operatorname{Ad}(\exp H) . \left[\begin{pmatrix} & -\bar{z} \\ z & \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \overset{\substack{\text{calcul sans } [\,]_{\mathbb{C}} \\ \downarrow}}{=} \left[\begin{pmatrix} & -\bar{z}' \\ z' & \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \text{ avec } z' = e^{\lambda_s - \lambda_r} z \text{ (rotation de v.p. } e^{\lambda_r - \lambda_s} \text{ et } e^{\lambda_s - \lambda_r}\text{)} \\ \operatorname{Ad}(\exp H) . \left[\begin{pmatrix} & jz \\ jz & \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \overset{\substack{\text{calcul sans } [\,]_{\mathbb{C}} \\ \downarrow}}{=} \left[\begin{pmatrix} & jz' \\ jz' & \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \text{ avec } z' = e^{-(\lambda_r + \lambda_s)} z \text{ (rotation de v.p. } e^{\lambda_r + \lambda_s} \text{ et } e^{-(\lambda_r + \lambda_s)}\text{)}. \end{array} \right.$

Donc : $R = \{ \lambda_r - \lambda_s \ ; \ r \neq s \} \cup \{ \lambda_r + \lambda_s \ ; \ r < s \} \cup \{ -(\lambda_r + \lambda_s) \ ; \ r < s \} \cup \{ 2\lambda_r \} \cup \{ -2\lambda_r \}$

et $\underset{(r<s)}{H_{\lambda_r - \lambda_s}} = \underbrace{i \times}_{\substack{\text{action dans } t_{\mathbb{C}} \\ \overset{\text{can}}{\simeq} \text{ produit dans } M(2n,\mathbb{C})}} \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} r & s \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} & \left[\begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \end{array}$, $\underset{(r<s)}{H_{\lambda_r + \lambda_s}} = i \times \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} r & s \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} & \left[\begin{pmatrix} -i & \\ & -i \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \end{array}$, $H_{2\lambda_r} = i \times \begin{array}{c|c} & r \\ \hline r & \left[\begin{pmatrix} -i & \\ & \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \end{array}$.

$\left[(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes_{\text{can}} \mathfrak{S}_n \overset{\text{gr}}{\simeq} W \text{ par } (\varepsilon, \sigma) . \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} = \left[\begin{pmatrix} (-1)^{\varepsilon_1} \times \lambda_{\sigma^{-1}(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & (-1)^{\varepsilon_n} \times \lambda_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \right.$

$\left. \text{donc } \varepsilon \overset{\text{can}}{=} \operatorname{Ad} \left[\begin{pmatrix} j^{\varepsilon_1} & & \\ & \ddots & \\ & & j^{\varepsilon_n} \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}} \text{ et } (r \ s) \overset{\text{can}}{=} \operatorname{Ad} \left[\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathbb{C}}^{\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}} . \right]$

Cas de $so(2n)$ (« type D_n »)

On utilise $(A|B) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A^* B)$ et $T \overset{\text{déf}}{=} [T_n]_{\mathbb{R}}$,

où $[A + iB]_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ pour $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

Donc $\| \underbrace{[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}}}_{H} \|^2 = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2$ quand $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in i\mathbb{R}$.

On a : $so(2n) = t \oplus \left(\bigoplus_{1 \le r < s \le n} \left\{ \begin{array}{c|cc} & r & s \\ \hline r & & \\ s & & \end{array} [\begin{pmatrix} & -\bar{z} \\ z & \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} ; z \in \mathbb{C} \right\} \right) \oplus \left(\bigoplus_{1 \le r < s \le n} \left\{ \mathrm{Ad}\left(\begin{array}{c|c} \overset{\longleftrightarrow}{n} & \overset{\longleftrightarrow}{n} \\ I & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right) . \begin{array}{c} r \\ s \end{array} [\begin{pmatrix} & -\bar{z} \\ z & \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} ; z \in \mathbb{C} \right\} \right)$

$r^{\text{ième}}$ terme

et $\left| \begin{array}{l} \mathrm{Ad}(\exp H) . [\begin{pmatrix} & -\bar{z} \\ z & \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} = [\begin{pmatrix} & -\bar{z}' \\ z' & \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \text{ avec } z' = e^{\lambda_s - \lambda_r} z \text{ (rotation de v.p. } e^{\lambda_r - \lambda_s} \text{ et } e^{\lambda_s - \lambda_r}) \\ \mathrm{Ad}(\exp H) . \left(\mathrm{Ad}\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right) . [\begin{pmatrix} & -\bar{z} \\ z & \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \right) = \mathrm{Ad}\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right) . [\begin{pmatrix} & -\bar{z}' \\ z' & \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \text{ avec } z' = e^{\lambda_r + \lambda_s} \text{ (rotation de v.p. } e^{\lambda_r + \lambda_s} \text{ et } e^{-(\lambda_r} \end{array} \right.$

Donc : $R = \{ \lambda_r - \lambda_s ; r \neq s \} \cup \{ \lambda_r + \lambda_s ; r < s \} \cup \{ -(\lambda_r + \lambda_s) ; r < s \}$

et $\underset{(r<s)}{H_{\lambda_r - \lambda_s}} = i \underset{\substack{\uparrow \\ \underbrace{\text{action dans } t_{\mathbb{C}}}_{\overset{\text{can}}{\simeq} \text{ produit dans } \mathcal{M}(2n,\mathbb{C})}}}{\times} \begin{array}{c} r \\ s \end{array} [\begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}}$, $\underset{(r<s)}{H_{\lambda_r + \lambda_s}} = i \times \begin{array}{c} r \\ s \end{array} [\begin{pmatrix} -i & \\ & -i \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}}$.

$\left[\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \mid \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \text{ pair} \} \rtimes_{\text{can}} \sigma_n \overset{\text{gr}}{\xrightarrow{\sim}} W \right.$ comme dans le cas de $so(2n+1)$ ci-dessous. $\left. \right]$

Cas de $so(2n+1)$ (« type B_n »)

On utilise $so(2n) \overset{\text{can}}{=} \{ \begin{pmatrix} 0 & \\ & A \end{pmatrix} ; A \in so(2n) \} \subseteq so(2n+1)$ et les notations relatives à $so(2n)$.

On a : $so(2n+1) = so(2n) \oplus \left(\bigoplus_{1 \le r \le n} \left\{ \begin{array}{c} \\ r \\ r \end{array} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \; \overset{r}{-x} \; 0 \,|\, 0 \; \overset{r}{-y} \; 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ y \\ 0 \end{smallmatrix} & \bigcirc \end{array} \right) ; x, y \in \mathbb{R} \right\} \right)$

et $\mathrm{Ad}(\exp H) . \left(\begin{array}{c|c} 0 & -x \quad -y \\ \hline x & \\ y & \bigcirc \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -x' \quad -y' \\ \hline x' & \\ y' & \bigcirc \end{array} \right)$ avec $x' + iy' = e^{\lambda_r}(x + iy)$ (rotation de v.p. e^{λ_r} et $e^{-\lambda_r}$)

Donc : $R = \{ \lambda_r - \lambda_s ; r \neq s \} \cup \{ \lambda_r + \lambda_s ; r < s \} \cup \{ -(\lambda_r + \lambda_s) ; r < s \} \cup \{ \lambda_r \} \cup \{ -\lambda_r \}$

et $\underset{(r<s)}{H_{\lambda_r - \lambda_s}} = i \underset{\substack{\uparrow \\ \underbrace{\text{action dans } t_{\mathbb{C}}}_{\overset{\text{can}}{\simeq} \text{ produit dans } \mathcal{M}(2n+1,\mathbb{C})}}}{\times} \begin{pmatrix} 0 & \\ & \begin{array}{c} r \\ s \end{array} [\begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \end{pmatrix}$, $\underset{(r<s)}{H_{\lambda_r + \lambda_s}} = i \times \begin{pmatrix} 0 & \\ & \begin{array}{c} r \\ s \end{array} [\begin{pmatrix} -i & \\ & -i \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \end{pmatrix}$, $H_{\lambda_r} = i \times \begin{pmatrix} 0 & \\ & r [\begin{pmatrix} -2i \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \end{pmatrix}$

$\left[\begin{array}{l} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes_{\text{can}} \sigma_n \overset{\text{gr}}{\xrightarrow{\sim}} W \text{ par } (\varepsilon, \sigma) . \begin{pmatrix} 0 & \\ & [\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & [\begin{pmatrix} (-1)^{\varepsilon_1} \times \lambda_{\sigma^{-1}(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & (-1)^{\varepsilon_n} \times \lambda_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \\ \text{donc } \varepsilon \overset{\text{can}}{=} \mathrm{Ad} \begin{pmatrix} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots \; 1 & & \\ & & & (-1)^{\varepsilon_1} & \\ & & & & \ddots \; (-1)^{\varepsilon_n} \end{pmatrix} \text{ et } (r \; s) \overset{\text{can}}{=} \mathrm{Ad} \begin{pmatrix} 1 & \\ & [\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}]_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{array}{c} r \\ s \end{array} . \end{array} \right]$