

# Type $A_n$ ( $n \geq 1$ )

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$$

- Sous-algèbre de Cartan:

$$\mathfrak{h} = (\text{Lie}(T_n, \text{SU}(n+1)))_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}; \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{C} \text{ et } \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 0 \right\}$$

- L'ensemble  $R = R^+ \cup (-R^+)$ , où  $R^+ = \{\lambda_i - \lambda_j; 1 \leq i < j \leq n+1\}$

et les vecteurs  $X_{\lambda_i - \lambda_j} = E_{ij}$  rotation  $= \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$  je déplace  $i$ -ligne pour  $1 \leq i, j \leq n+1$  et  $i \neq j$

vérifient:  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in R} \mathbb{C} X_{\alpha} \right)$  avec  $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha} \setminus \{0\}$  pour  $\alpha \in R$ .

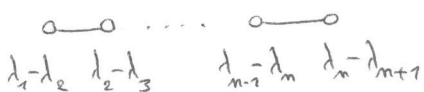
Donc  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

- L'ensemble  $B = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_n - \lambda_{n+1}\}$  est une base de  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  car:

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n+1.$$

- On trouve  $H_{\lambda_i - \lambda_j} = E_{ii} - E_{jj}$  pour  $1 \leq i < j \leq n+1$ .

le diagramme de Dynkin de  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  associé à  $B$  est:



- L'image du morphisme de groupes injectif

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n+1} &\longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) \\ \sigma &\longmapsto \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma^{-1}(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\sigma^{-1}(n+1)} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

est engendré par les images  $H_{\lambda_i - \lambda_j}$  des générateurs  $(i, j)$  pour  $1 \leq i < j \leq n+1$ , de  $\mathcal{D}_{n+1}$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{D'où: } \mathcal{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \langle \Delta_{\alpha}; \alpha \in R \rangle_{\text{groupe}} & \xrightarrow{\cong} & \langle \Delta_{H_{\alpha}}; \alpha \in R \rangle_{\text{groupe}} \cong \mathcal{D}_{n+1} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{t}\mathfrak{g}^{-1} \end{array}$$

# Type $B_m$ ( $m \geq 2$ )

$Pt_q + p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = 2I$

[je mets un 2 pour avoir  $\mathfrak{g}$  conjuguée à  $\mathfrak{so}(2m+1, \mathbb{C})$  sous  $\text{Ad}_{GL(2m+1, \mathbb{C})}$  sous  $\text{Ad}_{GL(2m+1, \mathbb{R}(i))}$ ]

$$\mathfrak{g} = \text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{so}(2m+1, \mathbb{C}) = \mathfrak{so} \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ (matrices d'ordre } 1+m+m \text{)}$$

- Sous-algèbre de Cartan :

$$\mathfrak{h} = \text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\text{lie } [\mathfrak{t}_m]_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_m & 0 \\ 0 & & & & \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & -\lambda_1 & \dots & -\lambda_m \end{pmatrix}; \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \right\}$$

- L'ensemble  $R = R^+ \cup (-R^+)$ , où  $R^+ = \{\lambda_i - \lambda_j; 1 \leq i < j \leq m\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j; 1 \leq i < j \leq m\} \cup \{\lambda_i; 1 \leq i \leq m\}$ ,

et, les vecteurs  $X_{\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i, j \leq m$  et  $i \neq j$ ,  $X_{\lambda_i + \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{ij} - E_{ji} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et  $X_{-\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{ji} - E_{ij} & 0 \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i < j \leq m$ ,  $X_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $X_{-\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i \leq m$

vérifient :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in R} \mathbb{C} X_{\alpha} \right)$  avec  $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha} \setminus \{0\}$  pour  $\alpha \in R$ .

Donc  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . [La conjugaison  $\sigma(X) = -\text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$  de  $\mathfrak{g}$  associée à  $\text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $(2m+1)$  vérifie  $\sigma(X_{\alpha}) = -X_{\alpha}$ . Donc : coordonnées de  $[X_{\alpha}, X_{\beta}]$  suivant  $X_{-\alpha-\beta} = -(\text{coordonnées de } [X_{\alpha}, X_{\beta}] \text{ suivant } X_{\alpha+\beta})$  pour  $\alpha, \beta \in R$ .

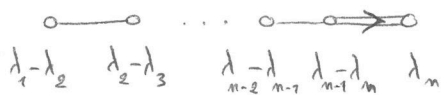
- L'ensemble  $B = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1} - \lambda_m, \lambda_m\}$  est une base de  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  car :

$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)$  et  $\lambda_i + \lambda_j = ((\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m) + \lambda_m) + ((\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m) + \lambda_m)$   
pour  $1 \leq i < j \leq m$ ,  $\lambda_i = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m) + \lambda_m$  pour  $1 \leq i \leq m$ .

- On trouve  $H_{\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ii} - E_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & E_{jj} - E_{ii} \end{pmatrix}$  et  $H_{\lambda_i + \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ii} + E_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{ii} - E_{jj} \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i < j \leq m$ ,

$H_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & 2E_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & -2E_{ii} \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i \leq m$ .

le diagramme de Dynkin de  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  associé à  $B$  est :



- L'image du morphisme de groupes injectif  $\{ \pm 1 \}^m \times_{\text{car}} \sigma_m \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$   
 $E \cdot \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_m & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} E_{\lambda_1} \sigma^{m-1} & \dots & E_{\lambda_m} \sigma^{m-1} \\ \dots & & \dots \\ -E_{\lambda_1} \sigma^{m-1} & \dots & -E_{\lambda_m} \sigma^{m-1} \end{pmatrix}$   
est engendrée par les images  $\Delta_{H_{\lambda_i - \lambda_j}}$ ,  $\Delta_{H_{\lambda_i + \lambda_j}}$ ,  $\Delta_{H_{\lambda_i}}$  respectivement de  $(i, j)$  pour

$1 \leq i < j \leq m$ , de  $(1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1)$ ,  $(i, j)$  pour  $1 \leq i < j \leq m$ , de  $(1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1)$  pour  $1 \leq i \leq m$ .

D'où :  $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong \{ \pm 1 \}^m \times_{\text{car}} \sigma_m$ .

# Type $C_n$ ( $n \geq 2$ )

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$$

- Sous-algèbre de Cartan :

$$\mathfrak{h} = \text{complexifiée de l'image de } \text{Lie } T_n \text{ par } [ \ ]_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda_{n-1} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \right\}$$

- L'ensemble  $R = R^+ \cup (-R^+)$ , où  $R^+ = \{\lambda_i - \lambda_j; 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j; 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2\lambda_i; 1 \leq i \leq n\}$ ,

et, les vecteurs  $X_{\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$  et  $i \neq j$ ,  $X_{\lambda_i + \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et

$$X_{-\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} + E_{ji} & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n, X_{2\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ii} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_{-2\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ii} & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

vérifient :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in R} \mathbb{C} X_{\alpha} \right)$  avec  $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha} \setminus \{0\}$  pour  $\alpha \in R$ .

Donc  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

- L'ensemble  $B = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}$  est une base de  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  car :

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \text{ et } \lambda_i + \lambda_j = ((\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)) + ((\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) + 2\lambda_n) \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$2\lambda_i = ((\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)) + ((\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) + 2\lambda_n) \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

- On trouve  $H_{\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} E_{ii} - E_{jj} & 0 \\ 0 & E_{jj} - E_{ii} \end{pmatrix}$  et  $H_{\lambda_i + \lambda_j} = \begin{pmatrix} E_{ii} + E_{jj} & 0 \\ 0 & -E_{ii} - E_{jj} \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $H_{2\lambda_i} = \begin{pmatrix} E_{ii} & 0 \\ 0 & -E_{ii} \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i \leq n$

le diagramme de Dynkin de  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  associé à  $B$  est :



- L'image du morphisme de groupes injectif  $\{ \pm 1 \}^n \times \Sigma_n \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$   

$$\varepsilon \cdot \sigma \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda_{n-1} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_{\sigma^{-1}(1)} & & & 0 \\ & \varepsilon_2 \lambda_{\sigma^{-1}(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\varepsilon_{n-1} \lambda_{\sigma^{-1}(n-1)} \\ & & & & -\varepsilon_n \lambda_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

est engendré par les images  $\rho_{H_{\lambda_i - \lambda_j}}$ ,  $\rho_{H_{\lambda_i + \lambda_j}}$ ,  $\rho_{H_{2\lambda_i}}$  respectivement de  $(i, j)$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ ,

de  $(1, 1, -1, 1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$   $(i, j)$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ , de  $(1, 1, -1, 1, \dots, 1)$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

D'où :  $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong \{ \pm 1 \}^n \times \Sigma_n$ .

# Type $D_m$ ( $m \geq 3$ )

$P \in \mathfrak{so}(2m, \mathbb{C}) \Rightarrow P = 2I$

$\mathfrak{g} = \text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{so}(2m, \mathbb{C}) = \mathfrak{so} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  (matrices d'ordre  $n+n$ ).

- Sous-algèbre de Cartan :

$\mathfrak{h} = \text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot (\text{Lie}[T_m]_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{m-1} & \\ 0 & & & -\lambda_m \end{pmatrix}; \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \right\}$ .

- L'ensemble  $R = R^+ \cup (-R^+)$ , où  $R^+ = \{\lambda_i - \lambda_j; 1 \leq i < j \leq m\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j; 1 \leq i < j \leq m\}$ ,

et, les vecteurs  $X_{\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i, j \leq m$  et  $i \neq j$ ,  $X_{\lambda_i + \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} - E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et

$X_{-\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ji} - E_{ij} & 0 \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i < j \leq m$ ,

vérifient :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in R} \mathbb{C} X_{\alpha} \right)$  avec  $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha} \setminus \{0\}$  pour  $\alpha \in R$ .

Donc  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

- L'ensemble  $B = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1} - \lambda_m, \lambda_{m-1} + \lambda_m\}$  est une base de  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  car :

$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)$  et  $\lambda_i + \lambda_j = ((\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{m-2} - \lambda_{m-1})) + ((\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)) + (\lambda_{m-1} + \lambda_m)$  pour  $1 \leq i < j \leq m$ .

- On trouve  $H_{\lambda_i - \lambda_j} = \begin{pmatrix} E_{ii} - E_{jj} & 0 \\ 0 & E_{jj} - E_{ii} \end{pmatrix}$  et  $H_{\lambda_i + \lambda_j} = \begin{pmatrix} E_{ii} + E_{jj} & 0 \\ 0 & -E_{ii} - E_{jj} \end{pmatrix}$  pour  $1 \leq i < j \leq m$ .

Le diagramme de Dynkin de  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  associé à  $B$  est :



- L'image du morphisme de groupes injectif  $\{\epsilon \in \{\pm 1\}^m \mid \epsilon_1 \dots \epsilon_m = 1\} \times_{\text{can}} \Sigma_m \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$

$\epsilon, \sigma \longmapsto \begin{pmatrix} \epsilon_1 \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \epsilon_{m-1} \lambda_{m-1} & \\ 0 & & & -\lambda_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon_1 \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \epsilon_{m-1} \lambda_{m-1} & \\ 0 & & & -\epsilon_1 \lambda_{m-1} \\ & & & & -\epsilon_m \lambda_{m-1} \end{pmatrix}$

est engendré par les images  $s_{\lambda_i - \lambda_j}$  et  $s_{\lambda_i + \lambda_j}$  respectivement de  $(ij)$  et de  $(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)(ij)$  pour  $1 \leq i < j \leq m$ .

D'où :  $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cong_{\text{groupes}} \{\epsilon \in \{\pm 1\}^m \mid \epsilon_1 \dots \epsilon_m = 1\} \times_{\text{can}} \Sigma_m$ .