

Calcul Différentiel et Séries de Fourier

Programme

I. Topologie des espaces métriques (2 semaines)

1. *Définitions*. Distance et espace métrique. Norme et espace vectoriel normé (evn). Norme induit distance. Exemples : les evn simples dans \mathbb{R}^n , les espaces de matrices (juste les normes naïves), les espaces fonctionnels (notamment fonctions continues muni de norme 1 et infini). Exemples : les espaces métriques qui ne sont pas evn.
2. *Notions basiques*. Ouvert, fermé. Suite convergente. Caractérisation d'un fermé par les suites. Adhérence, intérieur.
3. *Complétude*. Suite de Cauchy. Convergence implique Cauchy. Espace métrique complet : définition et exemples. Fonction Lipschitz : définition et exemple (norme). Théorème du point fixe de Banach pour les fonctions contractantes.
4. *Fonctions continues*. Définition. Lipschitz implique continu. Caractérisation de la continuité par les suites convergentes. Critère de Cauchy pour la limite d'une fonction en un point (espace d'arrivée complet). Continuité et opérations élémentaires (somme, composition, produit). Caractérisation de la continuité globale via image réciproque d'un ouvert/fermé.
5. *Compacité*. Définition séquentielle. Compact implique fermé borné. Fonction continue sur un compact atteint ses bornes.

II. Espaces vectoriels normés (2 semaines)

1. *Topologie des evn*. Compact = fermé borné dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. Normes équivalentes. Topologie invariante par changement de norme équivalente : ouvert, fermé, convergence, continuité, compacité, complétude. Équivalence des normes en dimension finie. Compact = fermé borné dans evn dim finie. Espace de Banach : définition, exemple, contre-exemple. Complétude des evn de dim finie.
2. *Norme subordonnée*. Définition(s). Formules pour des cas simples (normes 2, 1, ∞). Équivalence entre application linéaire Lipschitz, bornée, continue, continue en 0. Continuité des applications linéaires en dimension finie. Mentionner le cas des applications bilinéaires.
3. *Série de vecteurs*. Définitions : série, convergence et convergence normale. La convergence normale implique la convergence dans un Banach. Ex : exponentielle de matrice. Ex : séries de fonctions.

III. Calcul Différentiel (2 semaines)

1. *Dérivées dans \mathbb{R}^n* . Dérivée partielle pour une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Jacobienne, gradient. Dérivée partielle d'ordre 2 et supérieur. Hessienne. La Hessienne est la jacobienne du gradient. Théorème de Schwarz. Dérivée directionnelle, lien avec la jacobienne.
2. *Différentielle*. Différentielle d'une fonction entre evn. Lien avec Jacobienne et gradient en dimension finie. Lien avec dérivée en dimension 1. Différentiable implique continu. Calcul : règles de la somme, composée, produit. Calcul : formules pour fonctions linéaires, bilinéaires, quadratiques. Fonctions de classe C^1 : définition, caractérisation via les dérivées partielles, stabilité par somme composée etc.
3. *Différentielle seconde*. Différentielle seconde via la différentielle de la différentielle. Théorème de Schwarz. Lien avec la Hessienne. Double différentiabilité implique C^1 . Fonction de classe C^2 : définition, caractérisation via différentielle C^1 , via les dérivées partielles. Calcul : règles de la somme composée et produit. Calcul : formules pour fonctions linéaires, bilinéaires, quadratiques.
4. *Différentiabilité d'ordre supérieur*. Étendre rapidement les notions vues à l'ordre 1 et 2 à l'ordre p : différentielle d'ordre p comme application multilinéaire ; fonctions de classe C^p voire C^∞ et leur caractérisation via les dérivées partielles ; stabilité par somme et composée.

IV. Applications du Calcul Différentiel (2 semaines)

1. *Accroissements Finis*. Égalité des AF pour une fonction $X \rightarrow \mathbb{R}$. Inégalité des AF pour une fonction $X \rightarrow Y$. Caractérisation des fonctions constantes (resp. affines) via la différentielle nulle (resp. constante). Caractérisation des fonctions Lipschitziennes via la différentielle bornée.
2. *Approximation de Taylor*. Taylor-Young, Taylor-Lagrange, Taylor-Laplace à l'ordre 1, puis 2 puis p .
3. *Étude des extrema*. Définition : minimum, minimiseur, extremum, local vs. global. CNO premier ordre : les extrema sont points critiques. CSO deuxième ordre : si la hessienne est définie positive (resp. non définie) alors le point critique est un minimiseur local (resp. un point selle).
4. *TFI/TIL*. Définition : jacobienne partielle. Théorème des fonctions implicites (démonstration non-requise). Formule pour la différentielle de la fonction implicite. Définition : difféomorphisme local. Théorème d'inversion locale (démonstration non-requise).

V. Espaces de Hilbert (2 semaines)

1. *Espaces préhilbertiens*. Produit scalaire sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} : définition, exemples. Espace préhilbertien, espace de Hilbert. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Produit scalaire induit une norme. Vecteurs orthogonaux. Théorème de Pythagore. Identité du parallélogramme. Identité de polarisation.
2. *Projection sur un convexe*. Définition de la projection sur un ensemble quelconque. Caractérisation de la projection par les angles obtus. Théorème de la projection : existence et unicité de la projection sur un convexe fermé dans un Hilbert.
3. *Orthogonalité*. Orthogonal d'une partie. Orthogonal d'un sev est un sev fermé. Biorthogonal d'un sev. Projection sur un sev est linéaire. Décomposition en somme directe $H = F \oplus F^\perp$ via la projection orthogonale. Caractérisation des sev denses. Théorème de Riesz, exemple du gradient comme représentation de la différentielle.
4. *Base hilbertienne*. Définition. Inégalité de Bessel. Égalité de Parseval. L'exemple des exponentielles complexes (la densité peut se montrer avec le théorème de Weierstrass périodique).

VI. Analyse de Fourier (2 semaines)

1. *Polynômes trigonométriques, séries trigonométriques*. Définition de polynômes trigonométriques, séries trigonométriques. Représentation avec les coefficients c_n, a_n, b_n . Si une série $\sum c_n e^{inx}$ converge normalement, et f est la somme de la série alors $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.
2. *Série de Fourier*. Coefficients de Fourier d'une fonction 2π périodique : $c_n(f), a_n(f), b_n(f)$. Lemme de Riemann-Lebesgue. Coefficients de la fonction dérivée, décroissance des coefficients en fonction de la régularité de f .
3. *Théorie L^2* . Les $e_k(t) = e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}$, forment une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$. Convergence dans L^2 de la série de Fourier de f vers f . Inégalité de Bessel et égalité de Parseval.
4. *Théorèmes de convergence ponctuelle*. Théorèmes de convergence ponctuelle : théorème de Dirichlet pour les fonctions C_{pm}^1 (convergence ponctuelle vers la 1/2 somme), convergence normale de la série de Fourier si f continue et C_{pm}^1 . Si le temps le permet, théorème de convergence de Féjer pour les moyennes des séries de Fourier.

Références

La référence principale est le cours, avec le poly associé en ligne sur Moodle :

<https://moodle.u-pariscite.fr/course/section.php?id=242308>

Voici des références sur le calcul différentiel :

- le chapitre 6 du livre de Jean-Pierre MARCO, Philippe THIEULLEN, et Jacques-Arthur WEIL, *Mathématiques L2*. [51 L2 MAT]
- la partie I du livre de Hakim BOUMAZA, Marie DELLINGER, Laurent LAZZARINI, et Jean-Pierre MARCO, *Mathématiques L3*. [51 L3 MAT]
- les chapitres 2 à 5 du livre de Jean SAINT RAYMOND, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*. [517 SAI], cours en ligne sur <http://www.imj-prg.fr/~jean.saint-raymond/preprints/TopoCD.pdf>

Voici des références sur les séries de Fourier :

- Walter RUDIN, *Analyse réelle et complexe* (ch4, ch5 §14 et §15, ch9 §1 à §15) [517 RUD] (très classique!);
- Gérard BOURDAUD, *Mathématiques, 2^e année* (p. 201 à p. 229) [51 L2 BOU];
- Jacques PEYRIÈRE, *Convolution, séries et intégrales de Fourier* [517 PEY].

Partiel et Examens

Les notes des épreuves de contrôle continu au cours du semestre seront : *CC1* (45 mn en TD le 20 octobre), *CC2* (90 mn en amphi le 28 novembre), *CC3* (45 mn en TD le 15 décembre), et *EF* (3 heures en janvier).

La note finale à l'épreuve de la première session en janvier sera :

$$\mathbf{NF1} := \frac{1}{8} (\max(\mathbf{CC1}, \mathbf{EF}) + 2 * \max(\mathbf{CC2}, \mathbf{EF}) + \max(\mathbf{CC3}, \mathbf{EF}) + 4 * \mathbf{EF})$$

La note finale de la seconde session, avec une seconde note *EF2* en juin sera :

$$\mathbf{NF2} := \frac{1}{8} (\max(\mathbf{CC1}, \mathbf{EF2}) + 2 * \max(\mathbf{CC2}, \mathbf{EF2}) + \max(\mathbf{CC3}, \mathbf{EF2}) + 4 * \mathbf{EF2})$$

Pages web de CDF5

Page Moodle de CDF5 : <https://moodle.u-pariscite.fr/course/view.php?id=2438>

Responsable de CDF5 : Guillaume Garrigos <garrigos@lpsm.paris>.