

Contrôle 1 du 16 octobre 2023 (Durée 1h)

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés

Exercice 1. Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace de toutes les matrices 2×2 à coefficients réels muni de la norme

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(tAA)}.$$

Ici pour une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on note $\text{tr}(B)$ la trace de B qui est la somme des coefficients diagonaux de B .

(1) Montrer que l'application

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_1 = |a| + |b| + |c| + |d|.$$

est une norme.

(2) Déterminer deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad C_1 \|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq C_2 \|A\|_2$$

(3) Montrer que l'ensemble $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / |\text{tr}(A)| = 1\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(4) L'application $A \mapsto |\text{tr}(A)|$ est-elle une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? (Justifier votre réponse).

Exercice 2. On considère l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 < 0\}$.

(1) Montrer que D est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

(2) Montrer que D n'est pas fermé.

Exercice 3. On considère $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

(1) Soit l'application $\|\cdot\|_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |u(t)|$$

Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

(2) On rappelle que l'application définie sur E par

$$\forall u \in E, \quad \|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| dt.$$

est une norme sur E . Montrer que

$$\forall u \in E, \quad \|u\|_1 \leq \|u\|_\infty.$$

(3) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?

Indication : On pourra utiliser la suite de fonctions $u_n(t) = t^n$.

(4) Soit

$$F = \{u \in E / \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in [0, 1], u(t) = a + bt + ct^2\}.$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in F$,

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_1$$

(5) Montrer que l'application $V : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ définie par

$$\forall u \in E, \quad V(u) = |u|$$

est continue.

CONTRÔLE DU 25 NOVEMBRE 2023

Les documents, calculatrices et objets connectés ne sont pas autorisés.
Toute réponse doit être justifiée

Exercice 1. On munit \mathbb{R}^n de sa norme euclidienne usuelle définie par

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

On munit l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées de taille n de la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$, définie par

$$\|A\|_2 = \sup\{\|AX\|_2; X \in \mathbb{R}^n, \|X\|_2 = 1\}.$$

Etant donnée une matrice inversible A de $M_n(\mathbb{R})$, on définit $\Phi_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ par $\Phi_A(M) = A^{-1}MA$.

- (1) Montrer que Φ_A est une application linéaire continue, donner un majorant de sa norme faisant intervenir $\|A\|_2$ et $\|A^{-1}\|_2$.
- (2) Montrer que $\|\Phi_A\| \geq 1$.
- (3) On suppose que $n = 2$ et on fixe $\lambda \geq 1$. On note $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que $\|B_\lambda\|_2 = \lambda$.
 - (b) Calculer $\|\Phi_{A_\lambda}(B_1)\|_2$. En déduire que $\|\Phi_{A_\lambda}\| \geq \lambda$.
 - (c) Montrer que $\|\Phi_{A_\lambda}\| = \lambda$.

Exercice 2. On munit l'espace vectoriel $M_p(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées de taille p de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}\|_\infty = \max\{|a_{i,j}|; 1 \leq i, j \leq p\}.$$

- (1) Montrer que pour toutes matrices A, B de $M_p(\mathbb{R})$, on a $\|AB\|_\infty \leq p\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. La constante p est-elle optimale ?
- (2) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|M\|_\infty < \varepsilon$, alors la série de terme général $\frac{1}{n}M^n$ converge.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 - xy + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et } f(0, 0) = 0.$$

- (1) L'application f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
- (2) Différentiable sur \mathbb{R}^2 ?
- (3) De classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées de taille 2 l'application $F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(A) = \text{Tr}(A^3)$. Montrer qu'en tout point de $M_2(\mathbb{R})$ l'application F est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 dont les dérivées première et seconde sont bornées sur \mathbb{R} . On note $M > 0$ une constante telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\varphi'(t)| + |\varphi''(t)| \leq M.$$

On définit sur l'espace vectoriel E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} l'application $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall f \in E, \Phi(f) = \int_0^1 \varphi(f(t)) dt.$$

On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|; t \in [0, 1]\}$.

(1) (a) Justifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq M|h|.$$

(b) Montrer que Φ est continue.

(2) (a) Justifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, |\varphi(t+h) - \varphi(t) - \varphi'(t)h| \leq M\frac{h^2}{2}.$$

(b) Montrer que Φ est différentiable, donner sa différentielle au point $f \in E$.

Contrôle 3 du 11 décembre 2023 (Durée 1h)

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $f_a(x, y, z) = x + y + x^2 + y^2 + az^2$.

- (1) Montrer que f_a est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3
- (2) Etudier les extrema locaux de la fonction f_a en fonction du paramètre a .
- (3) Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 0, 0)$ de la fonction f_a .
- (4) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles f_a est un difféomorphisme local ?

Exercice 2. Soient U un ouvert de \mathbb{R} et $F, G : U \times U \rightarrow U$ deux fonctions de classe C^1 de deux variables réelles.

On considère $H_{F,G} : U \times U \times U \rightarrow U$ la fonction définie par $H_{F,G}(x, y, z) = F(x, G(y, z))$

- (1) Montrer que la fonction $H_{F,G}$ est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de $H_{F,G}$ en tout point.
- (2) On se place dans le cas $U = \mathbb{R}_+^*$ et $F = G = p$ avec $p(x, y) = x^y$. Donner la matrice jacobienne de $H_{p,p}$ au point $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.
- (3) A l'aide des questions précédentes, donner la dérivée de la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $g(t) = t^{t^t}$.

Exercice 3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application définie par $\varphi(x, y, z) = (e^y + e^z, z - x, x - y)$.

- (1) Montrer que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 .
- (2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, montrer que la différentielle de φ au point (x, y, z) est injective.
- (3) Montrer qu'au voisinage de tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, φ est un C^1 -difféomorphisme.
- (4) L'application φ est-elle un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^3 sur $\varphi(\mathbb{R}^3)$?

Devoir surveillé n° 1

Question de cours

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E . Donner la définition de l'intérieur de A .

Exercice 1

Soient $n \geq 1$ et a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs. On définit

$$\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i |x_i|.$$

1. Montrer que \mathcal{N} est une norme sur \mathbb{R}^n .
2. On suppose que $n = 2$ et que $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$. Dessiner la boule unité fermée associée à \mathcal{N} dans ce cas.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, où

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On définit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1, x - 2y \leq 0\}.$$

1. Représenter A dans le plan.
2. L'ensemble A est-il borné dans \mathbb{R}^2 ? *Justifier la réponse.*
3. Est-ce un ouvert de \mathbb{R}^2 ? *Justifier la réponse.*
4. Est-ce un fermé? *Justifier la réponse.*
5. Les résultats changent-ils si on remplace la norme $\|\cdot\|_2$ par une autre norme sur \mathbb{R}^2 ? *Justifier la réponse.*

Exercice 3

Soit $n \geq 2$. On considère l'espace vectoriel $E = M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $A = (a_{ij}) \in E$, on pose

$$\mathcal{N}(A) = n \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que \mathcal{N} est une norme sur E .
2. Soit $A, B \in E$. Montrer que
$$\mathcal{N}(AB) \leq \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B).$$
3. La norme \mathcal{N} est-elle une norme subordonnée à une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n ? *Justifier la réponse.*
4. On munit E de la norme \mathcal{N} et $L(E)$ de la norme subordonnée associée, que l'on note $\|\|\cdot\|\|$. Soit $A \in E$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On considère l'application linéaire $u : E \longrightarrow E$ définie par

$$u(M) = AM.$$

Montrer que

$$\|\|u\|\| = n.$$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel. On considère deux normes \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 sur E , et on note $\|\|\cdot\|\|_1$ et $\|\|\cdot\|\|_2$ les normes subordonnées associées sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E .

Montrer que si \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 sont équivalentes, alors $\|\|\cdot\|\|_1$ et $\|\|\cdot\|\|_2$ le sont aussi.

CONTRÔLE DU 8 NOVEMBRE 2024

Les documents, calculatrices et objets connectés ne sont pas autorisés.
Toute réponse doit être justifiée
Durée : 2 heures

RENDRE SUR DEUX COPIES SÉPARÉES LES DEUX PARTIES

Partie 1.

Question de cours. Donner la définition d'une application uniformément continue.

Exercice 1. En justifiant vos réponses avec une démonstration, dites si les ensembles suivants sont fermés, ouverts, bornés, compacts.

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } e^z + \cos y \geq 1\}$.
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } e^{|z|} + \cos y \leq 1\}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Montrer que f est partiellement dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (3) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$, et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- (4) Que vaut $\text{Jac}_{(0,0)} f$?
- (5) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. *Vous utiliserez la définition de différentiabilité.*

Tourner la page s.v.p.

Partie 2. À rendre sur une copie séparée.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (qui est de dimension infinie). Tout polynôme $P \in E$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, où d est appelé le degré de P , et on y associe la quantité $\|P\|_E := \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$. On admet que $\|\cdot\|_E$ est une norme sur E .

Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi_\alpha : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi_\alpha(P) = (P(\alpha))^2$. Les questions suivantes ont pour but de déterminer si φ_α est continue ou non.

- (1) Cas $|\alpha| < 1$.
 - (a) Soit $u_\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_\alpha(P) = P(\alpha)$. Montrer que u_α est linéaire et bornée.
 - (b) Qu'en déduire pour la continuité de φ_α ?
- (2) Cas $|\alpha| = 1$. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E par $P_n(X) := \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{n} X^k$.
 - (a) Calculer $\|P_n\|_E$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\|_E$. Que peut-on en déduire pour la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - (b) Calculer $\varphi_\alpha(P_n)$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(P_n)$, et conclure que φ_α n'est pas continue.

Exercice 4. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille n . On munit \mathbb{R}^n d'une norme quelconque $\|\cdot\|$, et on munit E de la norme subordonnée associée $\|\|\cdot\|\|$. On note I_n la matrice identité.

- (1) Montrer que $\forall A \in E, \forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|\|A^k\|\| \leq \|A\|^k$.
- (2) Montrer que pour toute $A \in E$, l'application $\Phi_A : E \rightarrow E$ définie par $\Phi_A(M) = AM$ est linéaire et continue.
- (3) A partir de maintenant on suppose que $\|A\| < 1$. Montrer que la série $\sum_k A^k$ converge. On notera par la suite $B_A := I_n + \sum_{k=1}^{\infty} A^k$.
- (4) Montrer que $\Phi_A(B_A) = B_A - I_n$, puis que $I_n = (I_n - A)B_A$.

Exercice 5. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille n . On munit \mathbb{R}^n de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on munit E de la norme subordonnée associée $\|\|\cdot\|\|_\infty$.

- (1) Soit $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre réelle de A . Montrer que $\|A\|_\infty \geq |\lambda|$.
- (2) Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
 - (a) Chercher ses valeurs propres.
 - (b) Calculer $\|A\|_\infty$.
 - (c) Est-ce que $\|A\|_\infty = \max_i |\lambda_i|$?

CC3 (durée : 1h)

Question de cours

Soit f une application différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^k .

1. Énoncer le théorème des accroissements finis dans le cas où $k = 1$.
2. Que peut-on dire si $k > 1$?

Exercices

- 1) Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.
 - a) Calculer la jacobienne de F en tout point de \mathbb{R}^2 .
 - b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, \tilde{F} la restriction de F à $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et $g = f \circ \tilde{F}$.
Exprimer la jacobienne de g en fonction de celle de f .
 - c) Montrer que les points critiques de f sont les images par \tilde{F} des points critiques de g .
- 2) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée pour tous $A, B \in E$ par $\Phi(A, B) = \text{Tr}(A) \cdot B + \text{Tr}(B) \cdot A$.
Justifier que Φ est différentiable et calculer sa différentielle.
- 3) On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 \cos y + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On admet qu'elle est deux fois différentiable sur \mathbb{R}^2 .

- a) Calculer ses dérivées partielles en $(x, y) \neq (0, 0)$, puis en $(0, 0)$.
- b) Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f .
- c) Calculer les dérivées partielles secondes en $(0, 0)$.
- d) Déterminer s'il y a un extremum local en $(0, 0)$; si c'est le cas, déterminer s'il est global.

