

Contrôle final

Exercice 1. On note $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On définit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$$

1. Montrer que U est ouvert de \mathbb{R}^2
2. Démontrer que la fonction f est minorée, mais non majorée sur U .
3. Montrer que f est différentiable sur U et calculer sa différentielle en tout point $(x, y) \in U$.
4. Déterminer l'ensemble des points critiques de f .
5. Déterminer la nature des points critiques (minimum/maximum local, point selle).
6. Montrer qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$,

$$\inf_{[\epsilon, \frac{1}{\epsilon}] \times [\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]} f = \inf_U f$$

7. En déduire que f admet un minimum global puis le déterminer ainsi que les points de minimum.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = g(|x|)$ où $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ est la norme euclidienne de x . Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Calculer $Df(x)$ et $D^2f(x)$ en fonction de x et des dérivées de g .
2. On note $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Calculer $\Delta f(x)$ en fonction de x et des dérivées de g .
3. Déterminer en fonction de la valeur de n les fonctions g qui satisfont $\Delta f = 0$

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^3 + xy - e^x$.

1. Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ définit y comme fonction implicite de x au voisinage du point $(0, 1)$.
2. Montrer que cette fonction est de classe \mathcal{C}^2 et en donner un développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$.

Exercice 4. On note $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}); f(0) = f(1) = 0\}$$

et on note pour $f \in E$

$$\|f\|_E = |f'(0)| + \|f''\|_\infty$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_E$ est une norme sur E .
2. (a) Montrer que pour $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \leq \|f\|_E$.
(b) Montrer que $I : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_\infty)$ définie par $I(f) = f$ est une application continue. Est-elle de classe \mathcal{C}^∞ ?
3. On pose $\Phi : E \rightarrow F$ définie par $\Phi(f) = f'' - f^3$. Montrer que Φ est différentiable et calculer $D\Phi(f).g$ pour $f, g \in E$. Attention : il faudra vérifier que $D\Phi(f) \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Exercice 5. On considère l'application $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $T(A) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^2)A$.

1. Montrer que T est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer sa différentielle $DT(A)$ en la matrice A .
2. Montrer que si $\text{Tr}(A^2) \neq 0$, on a $(DT(A))(H) = 0$ si et seulement si $H = 0$.
3. Déterminer les points A en lesquels T est un difféomorphisme local.
4. Montrer qu'il existe un voisinage U de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une application de classe \mathcal{C}^1 $S : U \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que si $H \in U$, on a $(S \circ T)(H) = H$, puis montrer que la différentielle de S en I_n est donné par

$$(DS(I_n))(H) = H - \frac{2}{3n} \text{Tr}(H)I_n.$$



CALCUL DIFFÉRENTIEL

EXAMEN FINAL - 3H - BARÈME SUR 40

Aucun document ou appareil électronique autorisé. Vous serez évalué-e sur la qualité de votre rédaction. Le barème donné est à valeur indicative, et pourra être amené à être modifié.

Notations : Dans ce devoir, $C^0([0, 1])$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} ; $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices réelles à m lignes et n colonnes; $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées de taille n ; M^\top désigne la transposée d'une matrice M ; $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^n ; $D_a f$ désigne la différentielle d'une fonction f au point a ; $\text{Jac}_a f$ désigne sa jacobienne; $D_a^2 f$ désigne sa différentielle d'ordre deux; $\nabla f(a)$ et $\nabla^2 f(a)$ désignent son gradient et sa hessienne, si elles existent.

(/6) **Exercice 1 (Questions de cours - Différentiabilité - 20 min).** Ici il n'est attendu aucune justification ou calcul, vous serez simplement évalué-e sur votre réponse.

- 1) Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces vectoriels normés en un point $a \in X$.
- 2) Soit $B : X \times Y \rightarrow Z$ une application bilinéaire bornée. Que vaut sa différentielle $D_{(a,b)} B$ en un point $(a, b) \in X \times Y$? Exprimer $D_a^2 f$ en fonction $\nabla^2 f(a)$.
- 3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t \in \mathbb{R}^n$. Que valent $\text{Jac}_t f$ et $D_t f$?
- 4) Donner le gradient et la hessienne de $f(x) = \frac{1}{2} \|\Phi x - y\|_2^2$, où $\Phi \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

(/5) **Exercice 2 (Calcul - 20 min).** Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , dont on suppose qu'en tout point sa hessienne $\nabla^2 f(x)$ est une matrice semi-définie positive. On considère $x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une trajectoire de classe C^1 qui est solution de l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) + \nabla f(x(t)) = 0.$$

Montrer par le calcul que la fonction $E(t) = \frac{1}{2} \|\nabla f(x(t))\|_2^2$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

(/5) **Exercice 3 (Lipschitzianité - 20 min).** Considérer chacune des fonctions f suivantes. Est-ce que $f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est Lipschitzienne? Est-ce que $\nabla f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ est Lipschitzienne? Si la réponse est oui, calculer la constante de Lipschitz correspondante.

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 - \sin(x)$.
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (x - y)^2 + e^x$.

(/5) **Exercice 4 (Taylor et minimisation - 20 min).** Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , et soit $a \in \mathbb{R}^n$ fixé.

- 1) Que vaut $T_a^1(x)$, le polynôme de Taylor¹ de f en a à l'ordre 1?
- 2) On admet que la fonction $f_G(x) := T_a^1(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - a\|_2^2$ admet un minimiseur global noté x_G (ici $\lambda > 0$). Utiliser une condition d'optimalité pour montrer que ce minimiseur est unique, et le calculer.
- 3) Que vaut $T_a^2(x)$, le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre 2?
- 4) On admet que la fonction $f_N(x) := T_a^2(x)$ admet un minimiseur global noté x_N , et on suppose que $\nabla^2 f(a)$ est inversible. Utiliser une condition d'optimalité pour montrer que ce minimiseur est unique, et le calculer.

Veuillez tourner la page s.v.p.

¹On rappelle que le polynôme de Taylor est le polynôme qui apparaît dans la formule de Taylor-Young.

(/5) **Exercice 5 (Recherche d'extrema - 20 min).** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy^2$.

- 1) Calculer les points critiques de f .
- 2) Déterminer les extrema locaux de f .
- 3) S'il y en a, sont-ils des extrema globaux ?

(/11) **Exercice 6 (Application du théorème des fonctions implicites - 45 min).** Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 . On notera $f(x, y)$ où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$, et on notera $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ses jacobiennes partielles en (x, y) . Soit $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction de classe C^1 . On définit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid f(x, y) = 0\}$ que l'on suppose borné.

- 1) Montrer qu'il existe $(a, b) \in K$ qui minimise g sur K , c'est-à-dire tel que

$$(\forall (x, y) \in K) \quad g(a, b) \leq g(x, y).$$

Dans la suite de l'exercice, $(a, b) \in K$ réfèrera à ce minimiseur de g sur K .

- 2) a) Quelle hypothèse faut-il faire sur f pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites à f en (a, b) ? Dans la suite de l'exercice on supposera cette hypothèse vraie. On dispose donc maintenant de $U \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de a , $V \subset \mathbb{R}^m$ un voisinage ouvert de b , et une fonction $\varphi : U \rightarrow V$ telle que

$$(\forall (x, y) \in U \times V) \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

- b) Donner la formule permettant d'exprimer $\text{Jac}_a \varphi$ en fonction des jacobiennes partielles de f .
- 3) a) Soit $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = g(x, \varphi(x))$. Montrer que a est un minimiseur de G . En déduire que $\nabla G(a) = 0$.
- b) Exprimer $\nabla G(a)$ en fonction de $\text{Jac}_a \varphi$ et des jacobiennes partielles de g . Vous voudrez introduire une fonction $\phi : U \rightarrow U \times V$ telle que $G = g \circ \phi$ afin d'appliquer la règle de différentiation en chaîne.
- c) On pose $\lambda = -\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)^{-1}$. Montrer à l'aide des trois questions précédentes que $\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$.
- d) Vérifier que $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. En déduire que

$$(\exists \lambda \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})) \quad \text{Jac}_{(a,b)} g + \lambda \text{Jac}_{(a,b)} f = 0.$$

- 4) Maintenant on suppose que $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et $g(x, y) = -x + y + 2$, avec $m = n = 1$. On cherche à calculer qui est (a, b) .
- a) Utiliser le résultat de la question précédente pour montrer que $a = -b$.
- b) Utiliser le fait que $(a, b) \in K$ pour en déduire les deux valeurs possibles que (a, b) peut prendre. Conclure.
- c) Epilogue : on avait supposé que K était borné en début d'exercice. Prouver que c'est vrai pour notre cas particulier.

(/3) **Exercice 7 (Compacité - 15 min).** Soit $X = C^0([0; 1])$ muni de la norme $\|f\|_X := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Soit B la

boule unité fermée de cet espace. Montrer que B n'est pas compacte, à l'aide de la suite de fonctions définie par $f_n(t) = t^n$.



CALCUL DIFFÉRENTIEL

EXAMEN FINAL 2 - 3H - BARÈME SUR 30

Aucun document ou appareil électronique autorisé. Vous serez évalué-e sur la qualité de votre rédaction. Le barème donné est à valeur indicative, et pourra être amené à être modifié.

Notations : Dans ce devoir, $C^0([0, 1])$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} ; $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices réelles à m lignes et n colonnes; $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées de taille n ; M^\top désigne la transposée d'une matrice M ; $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^n ; $D_a f$ désigne la différentielle d'une fonction f au point a ; $\text{Jac}_a f$ désigne sa jacobienne; $D_a^2 f$ désigne sa différentielle d'ordre deux; $\nabla f(a)$ et $\nabla^2 f(a)$ désignent son gradient et sa hessienne, si elles existent.

(/5) Exercice 1 (Opérateurs bornés sur un e.v.n. - 30 min). Pour chacun des cas suivants, déterminer si l'application linéaire $u \in L(E, F)$ est bornée, et le cas échéant calculer sa norme subordonnée.

- (/1) 1) $E = \mathbb{R}[t]$ muni de $\|P\|_\infty := \|(a_0, \dots, a_d)\|_\infty$ si $P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k$; $F = \mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$ et $u(P) := P(0)$. Ici $\mathbb{R}[t]$ désigne l'espace des polynômes réels en la variable t .
- (/2) 2) $E = F = \mathbb{R}[t]$ muni de $\|P\|_\infty$; $u(P) = P'$.
- (/1) 3) Même question que la précédente si on remplace $\mathbb{R}[t]$ par $\mathbb{R}_d[t]$ pour $d \in \mathbb{N}_*$. Ici $\mathbb{R}_d[t]$ désigne l'espace des polynômes réels en la variable t de degré inférieur ou égal à d .
- (/1) 4) $E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$; et $u(X) = AX$ pour $A \in E$ fixée.

(/5) Exercice 2 (Compacité - 30 min).

- (/3) 1) Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top M = Id, \det(M) = 1\}.$$
- (/2) 2) Soit $X = C^0([0; 1])$ muni de la norme $\|f\|_X := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Soit B la boule unité fermée de cet espace. Montrer que B n'est pas compacte, à l'aide de la suite de fonctions définie par $f_n(t) = t^n$.

(/4) Exercice 3 (Questions de cours - Différentiabilité - 20 min). Ici il n'est attendu aucune justification ou calcul, vous serez simplement évalué-e sur votre réponse.

- (/1) 1) Donner la définition de la différentiabilité d'une fonction $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces vectoriels normés en un point $a \in X$.
- (/1) 2) Soit $B : X \times Y \rightarrow Z$ une application bilinéaire bornée. Que vaut sa différentielle $D_{(a,b)} B$ en un point $(a, b) \in X \times Y$?
- (/1) 3) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable et $a \in \mathbb{R}^n$. Exprimer $D_a^2 f$ en fonction $\nabla^2 f(a)$.
- (/1) 4) Donner le gradient et la hessienne de $f(x) = \frac{1}{2} \|\Phi x - y\|_2^2$, où $\Phi \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

Veillez tourner la page s.v.p.

(/6) **Exercice 4 (Calcul Lyapunov - 40 min).** Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose qu'il existe une trajectoire $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 qui vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x''(t) + \frac{\alpha}{t}x'(t) + \nabla f(x(t)) = 0,$$

où $\alpha \in [3, +\infty[$, et où $x'(t) := \text{Jac}_t x$ et $x''(t) := \text{Jac}_t x'$. On définit la fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivante :

$$\mathcal{E}(t) := r(t) + h(t), \quad \text{où } r(t) = t^2(f(x(t)) - \inf f), \quad h(t) = \frac{1}{2}\|(\alpha - 1)(x(t) - x^*) + tx'(t)\|^2,$$

où x^* est un minimiseur de f .

(/4) 1) Calculer $r'(t)$ puis $h'(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, en utilisant les règles de calcul vues en cours. En déduire une expression de $\mathcal{E}'(t)$ qui ne dépende pas de la dérivée seconde $x''(t)$.

Vous ferez très attention à la nature (réel, vecteur ligne / colonne, matrice) des objets que vous manipulerez.

Vous serez notamment évalué·e·s sur votre capacité à écrire des expressions qui ont du sens.

(/1) 2) On suppose maintenant que f vérifie $f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. En déduire que $\mathcal{E}'(t) \leq 0$.

(/1) 3) Conclure que pour tout $t > 0$, $f(x(t)) - \inf f \leq \frac{(\alpha - 1)^2 \|x(0) - x^*\|^2}{2t^2}$.

(/5) **Exercice 5 (Lipschitzianité - 30 min).**

(/1) 1) Énoncer le théorème permettant de déterminer le caractère Lipschitzien d'une fonction $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ à l'aide de sa Jacobienne.

2) Considérer chacune des fonctions f ci-dessous. Utiliser le *théorème précédent* pour déterminer si $f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et/ou $\nabla f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sont Lipschitziennes. Si la réponse est oui, calculer la constante de Lipschitz correspondante.

(/2) • $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 - \sin(x)$.

(/2) • $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (x - y)^2 + e^x$.

(/5) **Exercice 6 (Taylor et minimisation - 30 min).** Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , et soit $a \in \mathbb{R}^n$ fixé.

(/1) 1) Que vaut $T_a^1(x)$, le polynôme de Taylor¹ de f en a à l'ordre 1 ?

(/2) 2) On admet que la fonction $f_G(x) := T_a^1(x) + \frac{1}{2\lambda}\|x - a\|_2^2$ admet un minimiseur global noté x_G (ici $\lambda > 0$). Calculer x_G .

(/1) 3) Que vaut $T_a^2(x)$, le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre 2 ?

(/1) 4) On admet que la fonction $f_N(x) := T_a^2(x)$ admet un minimiseur global noté x_N , et on suppose que $\nabla^2 f(a)$ est inversible. Calculer x_N .

¹On rappelle que le polynôme de Taylor est le polynôme qui apparaît dans la formule de Taylor-Young.