Université de Paris 25 mai 2021
L3 - Intégration et séries de Fourier 9h-12h

Examen session 1

Une attention particulière est portée à la précision des réponses et à la qualité de la rédaction. Tous les documents sont interdits, ainsi que les téléphones portables ou autres dispositifs éléctroniques.

Exercice 1. Soit u une fonction mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
On définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{nu(x)} \end{array}$$

1. Montrer que g_n est mesurable.
2. On suppose dans cette question que μ est la mesure de densité $\frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
   (a) Montrer que μ est une mesure finie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner un exemple de fonction mesurable u telle que g_1 ne soit pas intégrable.
3. On suppose que u est à valeurs négatives, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \leq 0$.
   (a) Montrer que g_n est intégrable.
   (b) La suite de fonctions g_n converge-t-elle simplement ? Si oui, donner sa limite simple.
   (c) Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu = \mu(u^{-1}(\{0\})).$$

Exercice 2. On considère un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions réelles mesurables.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \sup_{k,l\geq n} |f_k(x) - f_l(x)|$ est une fonction mesurable.
2. Démontrer que l'ensemble
$$A = \{x \in X; (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy}\}$$
   est membre de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 3. Le but de l'exercice est d'étudier l'opérateur T qui a une fonction $f \in L^2(]0, +\infty[, \mathbb{C})$ associe la fonction

$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

pour $x \in]0, +\infty[$

1. Montrer que la fonction $T(f)$ est bien définie.
   Dans les questions 2 à 7, on suppose que f est continue à support compact dans $[a, b]$ pour $0 < a < b$ (c'est à dire $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$)
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$|T(f)(x)| \leq \frac{\sqrt{b-a}\,\|f\|_{L^2}}{x}$$
3. Calculer la limite de $x\,(T(f)(x))^2$ lorsque $x \to +\infty$.
4. Donner une équation différentielle qui relie $T(f)$ et f.
5. On suppose de plus que f est une fonction (continue à support compact) réelle. En déduire à l'aide d'une intégration par parties que
$$\|T(f)\|_{L^2}^2 = 2\int_{[0,+\infty]} fT(f).$$

6. En déduire que si f est continue à support compact réelle,
$$\|T(f)\|_{L^2} \leq 2\,\|f\|_{L^2}\,.$$
7. Montrer que si f est continue à support compact à valeurs complexes,
$$\|T(f)\|_{L^2} \leq 2\,\|f\|_{L^2}\,.$$
8. Soit $f_n \in L^2(]0,+\infty[,\mathbb{C})$ une suite de fonctions qui converge vers $f \in L^2(]0,+\infty[,\mathbb{C})$ dans L^2. Montrer que $T(f_n)$ converge simplement vers $T(f)$.
9. Montrer que pour tout $f \in L^2(]0,+\infty[,\mathbb{C})$,
$$\|T(f)\|_{L^2} \leq 2\,\|f\|_{L^2}\,.$$
10. Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir cette inégalité avec une constante strictement plus petite que 2, en considérant la suite de fonctions $\left(\frac{\mathbf{1}_{[1,n]}(x)}{\sqrt{x}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$ et $f(0) = f(1)$.

1. Rappeler la définition du coefficient de Fourier $c_n(f)$ (aussi noté $\hat{f}(n)$). Donner et démontrer la relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$.
2. Rappeler la définition de la série de Fourier de f. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que pour $t \in [0,1]$,
$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|}.$$
3. On rappelle que $\|f\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. En déduire que
$$\|f\|_{\mathcal{C}^0}^2 \leq \frac{1}{12}\|f'\|_{L^2}^2.$$

Examen, 18 mai 2022

Documents et calculatrices interdits. Le barème est provisoire et donné à titre indicatif de l'importance relative des parties.

Questions de cours (7 points).

(a) Énoncer le lemme de Fatou (2.1.13) et montrer par un exemple que l'inégalité peut être stricte.

(b) Énoncer le théorème de convergence monotone (th 2.1.6).

(c) Dans $([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda)$, énoncer une propriété sur x vraie pour λ-presque tout x mais pas pour tout $x \in [0,1]$.

(d) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Donner la définition de l'espace quotient $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$. Peut-on munir cet espace d'un produit scalaire ? Si oui, lequel ?

(e) Soit H un espace de Hilbert séparable. Donner la définition d'une base hilbertienne de H (déf 6.4.2).

(f) On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Énoncer l'égalité de Parseval dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ muni de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (th 7.2.1).

(g) Donner un exemple de fonction qui n'est pas limite uniforme de sa série de Fourier. Justifier.

Exercice 1 : Une intégrale à paramètre (4 points).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(x) = \int_0^2 \frac{e^{-x(1+t)}}{1+t} dt\,.$$

(a) Montrer que G est décroissante sur $\mathbb{R}$

(b) Montrer que G admet une limite en $+\infty$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} G(n) = 0$, et en déduire la limite de la fonction G en $+\infty$.

(d) Montrer que $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
Indication : on pourra montrer que $G \in \mathcal{C}^1(I)$ pour tout intervalle ouvert borné $I \subset \mathbb{R}$.

(e) On rappelle que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = -2\frac{\sinh(x)}{x} e^{-2x}\,.$$

(f) On pose

$$F(x) = 2\int_0^x \frac{\sinh(t)}{t} e^{-2t} dt\,.$$

En vérifiant que $F'(x) + G'(x) = 0$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(t)}{t} e^{-2t} dt\,.$$

Exercice 2 : Une série de Fourier (4 points).

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On pose, pour $x \in [-1/2, 1/2]$, $f(x) = \cos(2\pi\alpha x)$, puis on prolonge f de manière 1-périodique à $\mathbb{R}$. On rappelle la convention suivante pour les coefficients de Fourier d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_0(f) &= c_0(f), \\ b_0(f) &= 0, \\ a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) \text{ pour } n > 0, \\ b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \text{ pour } n > 0. \end{aligned}$$

(a) Calculer $c_0(f)$.

(b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos(2\pi n t) dt \\ b_n(f) &= 0. \end{aligned}$$

(c) En calculant les valeurs des $c_n(f)$ ou celles des $a_n(f)$, montrer que la somme partielle au rang $n \in \mathbb{N}^*$ de la série trigonométrique de f s'écrit :

$$S_n(f)(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2\alpha^2}{k^2-\alpha^2}\cos(2\pi kx)\right).$$

(d) En déduire la valeur de la quantité ci-dessous (on fera appel à un théorème du cours en justifiant que les hypothèses sont vérifiées) :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.$$

Exercice 3 : Un changement de variable (2 points).

Soit T le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé de l'ensemble des points du triangle de coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. On pourra remarquer que $T = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \leq 1-y\}$.

Soit de plus f une fonction mesurable positive. Démontrer à l'aide d'un changement de variable que l'on a :

$$\int_T f(x+y)d(x,y) = \int_{[0,1]} uf(u)du.$$

Exercice 4 : Un calcul de l'intégrale de Gauss (5 points).

Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = \exp(-t^2)$.

(a) Démontrer que g est λ-intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Vérifier (par exemple en étudiant les variations d'une fonction) que l'on a la majoration suivante :

$$\forall x \in]-1,+\infty], \ln(1+x) \leq x.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}[}(t).$$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f_n(t) \leq g(t).$$

(d) Démontrer que la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers g sur $\mathbb{R}^+$. On pourra utiliser le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 1.

(e) Prouver que $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^+} g(x)dx$.

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle intégrale de Wallis d'ordre n le réel :

$$W_n = \int_{[0,\pi/2]}(\sin(u))^n du.$$

En utilisant un changement de variable, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda = \sqrt{n}\cdot W_{2n+1}.$$

(g) En admettant la formule de Wallis :

$$\lim_{p\to\infty}\sqrt{p}\cdot W_p = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

et à l'aide des questions précédentes, calculer la valeur de l'intégrale de Gauss, c'est-à-dire montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} g d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(h) (bonus) Démontrer la formule de Wallis. On pourra établir la décroissance de W_n, établir une relation entre W_{n+2} et W_n qui permettra d'obtenir une formule explicite pour W_n en fonction de la parité de n, et de montrer que $(n+1)W_{n+1}W_n$ est constante. Quelle est sa valeur ? Enfin, on montrera que $W_{n+1} \sim W_n$ puis on établira la formule.

Contrôle Final, 10 mai 2023. Durée 3h.

Exercice 1 : Questions de cours.

(a) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Donner la définition d'une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

(b) Démontrer qu'une fonction réelle continue est borélienne.

(c) Énoncer le théorème de Fubini-Lebesgue.

(d) Énoncer le théorème de représentation de Riesz dans un espace de Hilbert H.

(e) Soit H un espace de Hilbert séparable, et (e_n) une base hilbertienne de H. Énoncer les identités de Parseval pour x, $||x||$ et $\langle x, y\rangle$, lorsque $x, y \in H$.

On se place dans toutes les questions de cours suivantes dans le cadre de l'espace de Hilbert des fonctions 1-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont le carré du module est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, et on se donne une fonction f dans cet espace.

(f) Donner les définitions des coefficients de Fourier de f.

(g) Donner la définition de $S_N f$, la somme partielle de Fourier de f au rang N.

(h) Énoncer l'inégalité de Bessel pour f.

Exercice 2 : Suites à valeur moyenne nulle.

On se place dans $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ l'espace des suites à valeurs complexes dont le carré du module est intégrable par rapport à la mesure de comptage ν.
On rappelle que H, muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$, est un espace de Hilbert.
On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et on considère $M = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H | \sum_{k=0}^{N} x_k = 0\}$.

(a) Montrer que l'application

$$\psi : H \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \sum_{k=0}^{N} x_k$$

est une application linéaire continue. Montrer que sa norme d'opérateur vaut $\sqrt{N+1}$ (on rappelle que $|||\psi||| = \sup_{x\in H} ||\psi(x)||_2/||x||_2$).

(b) Déduire de la question précédente et d'un théorème du cours que $H = M \oplus M^{\perp}$.

(c) Soit $y := (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $y_k = 1$ si $k \leq N$ et $y_k = 0$ si $k > N$. Montrer que $y \in H$ puis que $y \in M^{\perp}$.

(d) Montrer que $M^{\perp} = \text{Vect}(y)$.

(e) Soit $z \in H$ la suite telle que $z_0 = 1$ et $z_k = 0$ pour $k \geq 1$. Calculer $p_{M^{\perp}}(z)$, le projeté orthogonal de z sur $M^{\perp}$. En déduire la valeur de $p_M(z)$, le projeté orthogonal de z sur M. En déduire la distance entre z et M.

(f) Exprimer la distance entre M et une suite $u \in H$ en fonction de u et de $\tilde{y} := y/||y||_2$.

Exercice 3 : Mesure image.

Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et $f : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ une application mesurable. On définit la mesure image de μ par f, notée $f^{-1} \circ \mu$, sur $(F, \mathcal{F})$ par

$$\forall A \in \mathcal{F},\ f^{-1} \circ \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

(a) Justifier que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de F , $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ et que pour tout $A \subset F$, $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

(b) Montrer que $f^{-1} \circ \mu$ est bien une mesure sur $(F, \mathcal{F})$.

(c) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$, $f^{-1} \circ \mu(A) = \int \mathbf{1}_A(f(x)) d\mu(x)$.

(d) En déduire que pour toute fonction étagée $\phi : F \to \mathbb{R}_+$,

$$\int \phi d(f^{-1} \circ \mu) = \int \phi(f(x)) d\mu(x). \tag{1}$$

(e) Etendre (1) à toutes les fonctions mesurables positives $\phi : F \to \mathbb{R}_+$.

(f) Soit ϕ une application mesurable de $(F, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déduire des questions précédentes que $\phi \in L^1(F, \mathcal{F}, f^{-1} \circ \mu) \Longleftrightarrow \phi \circ f \in L^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, auquel cas l'égalité (1) est vraie pour ϕ.

Soit λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et γ la mesure gaussienne centrée réduite sur $\mathbb{R}^2$ définie pour toute fonction mesurable positive $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ par

$$\int \phi d\gamma = (2\pi)^{-1} \int \phi(x, y) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d\lambda_2(x, y).$$

On définit de plus l'application $f : (x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$.

(g) En justifiant soigneusement le changement de variables polaires, montrer que pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int \phi(f(u)) d\gamma(u) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(r) r e^{-r^2/2} d\lambda(r),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(h) En déduire que la mesure image de γ par l'application $f : (x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$ est la mesure $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(r) r e^{-r^2/2} d\lambda(r)$.

Exercice 4 : Une expression du logarithme.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\log \alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t} \big(e^{-\frac{1}{2t}} - e^{-\frac{\alpha^2}{2t}}\big) d\lambda(t). \tag{2}$$

(a) Soit $f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha, t) = \frac{1}{2t}(e^{-\frac{1}{2t}} - e^{-\frac{\alpha^2}{2t}})$. Calculer pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0^+} f(\alpha, t)$.

(b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $f(\alpha, t) \sim_{t \to +\infty} \frac{(\alpha^2 - 1)}{4t^2}$.

(c) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $t \mapsto f(\alpha, t)$ est borélienne et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose pour tout $\alpha > 0$, $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(\alpha, t) d\lambda(t)$.

(d) Montrer, en énonçant et justifiant *avec soin* toutes les hypothèses du théorème utilisé que I dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall \alpha > 0, \ I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2t^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2t}} d\lambda(t).$$

On pourra traiter cette question en se prenant dans un premier temps à $\alpha \in]\epsilon, M[$, avec $0 < \epsilon < M < \infty$.

(e) Justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2t^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2t}} d\lambda(t)$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2t^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2t}} dt$

(f) Calculer $I'(\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$ et en déduire (2).

Exercice 5 : Un critère d'irrationalité.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 1-périodique,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

On pourra commencer par montrer que cet énoncé est vrai pour $e_\ell(x) = e^{2i\pi\ell x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Montrer à l'aide d'un exemple que l'égalité n'est pas vraie si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Université Paris Cité **2024-2025**
ISF 6 **L3 MFA, METIS, MI, MP**

Intégration et séries de Fourier
Contrôle final - durée 3h

20 mai 2025

Documents, téléphones et tous autres appareils électroniques interdits

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Soit $(E,\mathscr{A})$, un espace mesurable. Donner la définition de " μ est une mesure sur $(E,\mathscr{A})$."
2. Enoncer le théorème de convergence monotone pour une suite de fonctions dans un espace mesuré.
3. Enoncer le théorème de Fubini-Lebesgue.
4. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est fermé si et seulement si il est égal à l'orthogonal de son orthogonal.
5. Donner un exemple d'une base hilbertienne de l'espace $\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ des classes de fonctions 1-périodiques de carré intégrable.

Exercice 2.

1. Soient $(X,\mathscr{B},\mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (pour la tribu $\mathscr{B}$), et μ-intégrable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in X;\ f(x) \geq n\}$.

   (a) Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x)\mathbb{1}_{A_n}(x)$ est mesurable.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_{A_n} f(x)\,d\mu(x) = \int_X f(x)\mathbb{1}_{A_n}(x)\,d\mu(x)$.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   (c) Soient $B \in \mathscr{B}$ et $a \in \mathbb{R}_+$ tels que $\mu(B) \leq +a$.

      i. Posons $C = B \cap A_n,\ A' = A_n \setminus B$ et $B' = B \setminus A_n$, de sorte que C, A' et B' sont disjoints deux à deux, $A_n = C \cup A'$ et $B = C \cup B'$. Établir les inégalités :

      $$\int_C f(x)\,d\mu(x) \leq \int_{A_n} f(x)\,d\mu(x) \text{ et } \int_{B'} f(x)\,d\mu(x) \leq n\,\mu(B') \leq na.$$

      ii. En déduire que $\int_B f(x)\,d\mu(x) \leq u_n + an$.

   (d) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $B \in \mathscr{B}$, on ait

   $$\mu(B) \leq \alpha \Rightarrow \int_B f(x)\,d\mu(x) \leq \varepsilon.$$

   (On sera amené à choisir n tel que $u_n < \varepsilon$).

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

   (a) En utilisant la question précédente, prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 \leq y - x \leq \alpha$, on ait

   $$\int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

(b) En déduire que l'application $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est uniformément continue (sur $\mathbb{R}$).

Exercice 3. On veut calculer l'aire (pour la mesure de Lebesgue λ^2) à l'intérieur d'une ellipse $\mathscr{E}$ définie par $\mathscr{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; ax^2+by^2<1\}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, et on note $\mathscr{E}' = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2; ax^2+by^2<1\}$.

1. On définit $\psi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}^2$ par $\psi(x,y) = \left(ax^2+by^2, \arctan\left(\frac{\sqrt{b}y}{\sqrt{a}x}\right)\right)$.
   Montrer que ψ est un C^1-difféomorphisme sur son image.
2. Déterminer $\psi(\mathscr{E}')$.
3. En utilisant ψ comme changement de variables calculez l'aire $\lambda^2(\mathscr{E}')$ de $\mathscr{E}'$.
4. Utilisez les symétries de $\mathscr{E}$ pour en calculer l'aire $\lambda^2(\mathscr{E})$.

Exercice 4. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$. On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{\sqrt{1+xf^2(t)}} d\lambda(t).$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que $\lim_{+\infty} F(x) = 0$.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que si $f \in \mathscr{L}^3_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$, alors F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
5. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbb{1}_{]0,1[}(t)$.
   (a) Montrer que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$ mais $f \not\in \mathscr{L}^3_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$.
   (b) Calculer explicitement la fonction F associée à f et étudier sa dérivabilité à droite en 0.

Exercice 5.
Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$.

Soit f la fonction 1-périodique impaire définie par

$$f : \left]0, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R} \quad f(x) = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right), f(0) = 0 \text{ et } f(\frac{1}{2}) = 0 \quad .$$

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi-1}{2}$.
   On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $g(x) = f(x + \frac{1}{2\pi}) - f(x - \frac{1}{2\pi})$
3. Montrer que g est paire et calculer les coefficients de Fourier réels de g.
4. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}$ et conclure.