Boule fermée unité l^p dans $\mathbb{R}^2$ avec $0 < p \leq +\infty$ (J-Y D)

Rappel

(a) On dit qu'une application $f : \underset{\text{intervalle}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si :

$$\forall x, y \in I \quad \forall t \in [0,1] \quad f\big(tx + (1-t)y\big) \leq t\, f(x) + (1-t)\, f(y).$$

Dans ce cas f a des dérivées à droite et à gauche, donc continue, en tout point intérieur à I.

(b) Toute application continue $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui a une dérivée croissante sur $\mathring{I}$ est convexe.

Démonstration (du (b))

On se donne f comme dans (b). Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. On va vérifier l'inégalité du (a).

On applique le théorème des accroissements finis à f entre $a := tx + (1-t)y$ et $b \in I$ fixé.
Il existe $c \in \,]a, b[$ tel que : $f(b) = f(a) + (b-a) f'(c)$.
D'où, en distinguant les cas « $a \leq b$ » et « $a > b$ » : $f(b) \geq f(a) + (b-a) f'(a)$.

En choisissant d'une part $b := x$ et d'autre part $b := y$, on en déduit que :

$f(x) \geq f(tx + (1-t)y) + (1-t)(x-y)\, f'(tx + (1-t)y)$

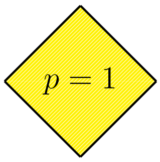
et $f(y) \geq f(tx + (1-t)y) - t(x-y)\, f'(tx + (1-t)y)$.

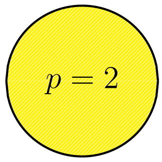
On obtient le résultat en additionnant t fois la 1re inégalité et $1-t$ fois la 2e inégalité. □

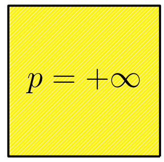
Cas $1 \leq p \leq +\infty$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose : $\|(x,y)\|_p = \big(|x|^p + |y|^p\big)^{\frac{1}{p}}$ si $p \neq +\infty$, et $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

L'application $\|\ \|_p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Quelques boules fermées unité : 

, 

, 

.

Démonstration (de l'inégalité triangulaire)

Le cas $p = +\infty$ se traite directement sans difficulté. On suppose maintenant que $p \neq +\infty$.

Soient $X = (x, y), X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $M := (a, b) := \frac{X}{\|X\|_p}$, $M' := (a', b') := \frac{X'}{\|X'\|_p}$, $t := \frac{\|X\|_p}{\|X\|_p + \|X'\|_p}$.

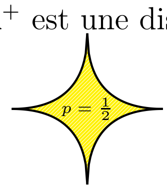
Comme $\begin{array}{rcl} f \colon \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & u^p \end{array}$ est convexe, on a : $\big(tu + (1-t)v\big)^p \leq t\, u^p + (1-t)\, v^p$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^+$.

Donc : $\|tM + (1-t)M'\|_p \overbrace{\leq}^{\text{clair}} \big((t|a| + (1-t)|a'|)^p + (t|b| + (1-t)|b'|)^p\big)^{\frac{1}{p}} \leq \big(t \overbrace{\|M\|_p^p}^{1} + (1-t) \overbrace{\|M'\|_p^p}^{1}\big)^{\frac{1}{p}} = 1$,
ce qui, grâce au choix de t, fournit finalement l'inégalité $\|X + X'\|_p \leq \|X\|_p + \|X'\|_p$. □

Cas $0 < p < 1$

Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ On pose : $d_p\big((x,y), (x',y')\big) = |x - x'|^p + |y - y'|^p$.

L'application $d_p \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Une boule fermée unité : 

.

Démonstration (de l'inégalité triangulaire)

Soient $X = (x, y), X' = (x', y'), X'' = (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$. A-t-on $d_p(X, X'') \leq d_p(X, X') + d_p(X', X'')$?
Comme $\begin{array}{rcl} g \colon \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^p \end{array}$ est croissante, nulle en 0, et d'opposée convexe, on a :

$$g(u) + g(v) = \underbrace{g\Big(\tfrac{u}{u+v}(u+v) + \tfrac{v}{u+v}(0)\Big)}_{\geq \frac{u}{u+v} g(u+v) + \frac{v}{u+v} g(0)} + \underbrace{g\Big(\tfrac{u}{u+v}(0) + \tfrac{v}{u+v}(u+v)\Big)}_{\geq \frac{u}{u+v} g(0) + \frac{v}{u+v} g(u+v)} \geq g(u+v) \text{ pour tous } \underbrace{u, v \in \mathbb{R}^+}_{\text{isoler le cas } (u,v) = (0,0)}.$$

On prend (u, v) parmi $(|x - x'|, |x' - x''|)$ et $(|y - y'|, |y' - y''|)$, puis utilise la croissance de g :

$|x - x'|^p + |x' - x''|^p \geq \big(|x - x'| + |x' - x''|\big)^p \geq |x - x''|^p$

et $|y - y'|^p + |y' - y''|^p \geq \big(|y - y'| + |y' - y''|\big)^p \geq |y - y''|^p$.

On conclut en additionnant ces deux inégalités. □

Cas $1 < p, q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: démonstration classique

On se donne $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On pose : $\|x\|_p := \big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \big)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(a) Soient $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a : $\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$.

(b) Soient $v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a : $\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p$.

Démonstration

(a) Sachant que l'application $\ln \colon \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ est concave, on a pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{1}{p} \ln\left(\frac{|x_k|^p}{(\|x\|_p)^p}\right) + \frac{1}{q} \ln\left(\frac{|y_k|^q}{(\|y\|_q)^q}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{(\|y\|_q)^q}\right).$$

On applique l'exponentielle à l'inégalité précédente puis additionne sur $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) On obtient, en utilisant (a) :

$$\sum_{k=1}^{n} |v_k + w_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |v_k + w_k| \, |v_k + w_k|^{p-1} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |v_k| \, |v_k + w_k|^{p-1}}_{\leq \|v\|_p \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (|v_k + w_k|^{p-1})^q}_{(\|v+w\|_p)^p} \Big)^{\frac{1}{q}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |v_k| \, |w_k + w_k|^{p-1}}_{\leq \|w\|_p \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (|v_k + w_k|^{p-1})^q}_{(\|v+w\|_p)^p} \Big)^{\frac{1}{q}}}.$$

D'où le résultat. $\square$