

Définition 1

Soient E un ensemble et Γ une partie de $E \times E$. On note « $x \leq y$ » pour « $(x, y) \in \Gamma$ ».

On dit que \leq est une relation d'ordre (ou que (E, \leq) est un ensemble ordonné) si :

- (i) $\forall x \in E \quad x \leq x$;
- (ii) $\forall x, y \in E \quad ((x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y)$;
- (iii) $\forall x, y, z \in E \quad ((x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z)$.

Dans ce cas, on dit que \leq est un ordre total si :

- (iv) $\forall x, y \in E \quad (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$.

Définition 2

Soient E un ensemble et \leq une relation d'ordre sur E .

(a) Un *majorant* d'une partie A de E est un élément m de E tel que : $a \leq m$ pour tout $a \in A$. Une *chaîne* de (E, \leq) est une partie A de E sur laquelle \leq est un ordre total.

(b) Quand $x, y \in E$, on note « $x < y$ » pour « $x \leq y$ et $x \neq y$ ».

Un *élément maximal* de (E, \leq) est un élément m de E tel qu'aucun $x \in E$ ne vérifie $m < x$. [Attention de ne pas confondre « élément maximal » avec « plus grand élément ».]

(c) On dit que \leq est un *bon ordre* si toute partie non-vide de E a un plus petit élément. (*)

Théorème

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) « Lemme de Zorn » : un ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée, a un élément maximal.
- (ii) « Théorème de Zermelo » : tout ensemble admet un bon ordre.
- (iii) « Axiome du choix » : pour tout ensemble E , il existe une application f de l'ensemble des parties non-vides de E dans E , telle que pour toute partie non-vide A de E on ait $f(A) \in A$.

DÉMONSTRATION

((i) \implies (ii)) On suppose que le lemme de Zorn est vérifié.

On se donne un ensemble E et cherche à construire un bon ordre sur E .

On appellera ici *segment initial* d'un ensemble ordonné (Y, \leq) une partie X de Y telle que :
si $x \in X$, alors $\{y \in Y \mid y < x\} \subseteq X$.

On pose : $\mathcal{M} = \{(A, \mathcal{R}_A) ; A \subseteq E \text{ et } \mathcal{R}_A \text{ bon ordre sur } A\}$. On ordonne \mathcal{M} par :

$(A, \mathcal{R}_A) \leq (B, \mathcal{R}_B) \iff A \subseteq B \text{ et } \mathcal{R}_A \text{ est restriction de } \mathcal{R}_B \text{ et } A \text{ est un segment initial de } B$.

On vérifie maintenant que (\mathcal{M}, \leq) est un ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée.

Soit \mathcal{C} une chaîne de (\mathcal{M}, \leq) . On pose $\mathcal{A} = \{A ; (A, \mathcal{R}_A) \in \mathcal{C}\}$ et $C = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.

On munit C de l'ordre \mathcal{R}_C suivant : $\forall x, y \in C \quad (x \mathcal{R}_C y \iff \exists A \in \mathcal{A} \quad (x, y \in A \text{ et } x \mathcal{R}_A y))$.

Il faut remarquer que dans cette définition la condition « $x \mathcal{R}_A y$ » ne dépend pas du choix de A .

Soit S une partie non-vide de C . On fixe $s \in S$; il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $s \in A$.

On suppose que s n'est pas le plus petit élément de S (sinon S a un plus petit élément).

On introduit $T := \{t \in S \setminus \{s\} \mid t \mathcal{R}_C s\}$. Soit $t \in T$; il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $t \in B$. On sait que $t \mathcal{R}_C s$, et que \mathcal{C} est une chaîne : soit on a $(A, \mathcal{R}_A) \leq (B, \mathcal{R}_B)$ et comme A est un segment initial de B on obtient $t \in A$, soit on a $(B, \mathcal{R}_B) \leq (A, \mathcal{R}_A)$ et comme $B \subseteq A$ on obtient encore $t \in A$. Comme T est une partie non-vide de A , il a un plus petit élément m pour le bon ordre \mathcal{R}_A .

En comparant les éléments de S à s (\mathcal{R}_C est total), on obtient : m est le plus petit élément de S .

Ainsi \mathcal{R}_C est un bon ordre.

(*) En utilisant les parties de E formées de deux éléments, on constate qu'un bon ordre est un ordre total.

On constate que (C, \mathcal{R}_C) est un majorant de \mathcal{C} dans (\mathcal{M}, \leq) . En effet, pour tout $(A, \mathcal{R}_A) \in \mathcal{C}$, on a : $A \subseteq C$ et \mathcal{R}_A est restriction de \mathcal{R}_C ; de plus, lorsque $s \in A$ et $t \in C \setminus \{s\}$ vérifient $t \mathcal{R}_C s$, on obtient $t \in A$ en raisonnant comme ci-dessus.

D'après le lemme de Zorn, (\mathcal{M}, \leq) a un élément maximal (A_0, \mathcal{R}_{A_0}) . Il reste à voir par l'absurde que $A_0 = E$. Sinon on fixe $x \in E \setminus A_0$. On pose $A_1 = A_0 \cup \{x\}$. On note \mathcal{R}_{A_1} l'ordre sur A_1 qui prolonge \mathcal{R}_{A_0} et rend x maximal. On a : $(A_1, \mathcal{R}_{A_1}) \in \mathcal{M}$ et $(A_0, \mathcal{R}_{A_0}) < (A_1, \mathcal{R}_{A_1})$ contradiction.

((ii) \implies (iii)) On suppose donné un bon ordre \leq sur E . Il permet de construire l'application f qui à toute partie non-vide A de E associe le plus petit élément de A .

((iii) \implies (i)) Cette implication, qui est la plus difficile, est admise.

Voir par exemple <https://www.irif.fr/~roziere/m63010/zorn.pdf> □

Dorénavant on se placera dans le cadre de la théorie des ensembles usuelle (de Zermelo-Fraenkel) à laquelle on ajoute l'axiome du choix.

Corollaire

Tout espace vectoriel E sur un corps commutatif \mathbb{K} a une base.

DÉMONSTRATION

On note X l'ensemble des parties L de E pour lesquelles la famille $(v)_{v \in L}$ est libre.

Soit \mathcal{C} une chaîne de (X, \subseteq) . On pose : $M = \bigcup_{L \in \mathcal{C}} L$.

Soit $\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{distincts}}$ une partie finie de M . Il existe $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{C}$ tels que $v_1 \in L_1, \dots, v_n \in L_n$.

Comme \mathcal{C} est une chaîne, on dispose parmi L_1, \dots, L_n d'un plus grand élément L_i ($1 \leq i \leq n$).

On a donc $v_1, \dots, v_n \in L_i$, ce qui montre que la famille (v_1, \dots, v_n) est libre. Ainsi M est libre.

Par conséquent \mathcal{C} est majorée dans (X, \subseteq) par M .

On applique le lemme de Zorn. Il existe un élément maximal B dans (X, \subseteq) .

Soit $x \in E$. Comme B est maximal, la partie $B \cup \{x\}$ de E n'est pas libre, ce qui fournit $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n \in B \cup \{x\}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Vu que $(v)_{v \in B}$ est libre, l'un des vecteurs v_1, \dots, v_n est égal à x avec un coefficient α_i correspondant non-nul. On obtient ainsi x comme combinaison linéaire de vecteurs de B .

On en conclut que la famille $(v)_{v \in B}$ est une base de E . □