Espaces vectoriels normés : à retenir (J-Y D)

Soient E, F, et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition

(a) Une *norme* sur E est une application $N\colon E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
(i) $\forall v \in E \quad (N(v) = 0 \implies v = 0)$;
(ii) $\forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda\, v) = |\lambda|\, N(v)$; $\longleftarrow$[donc : $N(0) = 0$]
(iii) $\forall v, w \in E \quad N(v + w) \le N(v) + N(w)$ (« inégalité triangulaire »).

(b) On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont *équivalentes* si :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \qquad \alpha N_1 \le N_2 \le \beta N_1 \,. \tag{$\star$}$$

(c) La *distance* associée à une norme N sur E est l'application $d\colon E \times E \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x, y \in E \qquad d(x, y) := N(x - y)\,. \tag{$\star\star$}$$

Définition

(a) On appelle *produit scalaire* sur E une application $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ de E^2 dans $\mathbb{K}$ telle que
(i) l'application $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire pour tout $y \in E$;
(ii) on a : $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ pour tous $x, y \in E$;
(iii) on a : $\langle x, x\rangle \ge 0$ et $(\langle x, x\rangle = 0 \;\Rightarrow\; x = 0)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

(b) On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.
Dans ce cas, $x \in E \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}^+$ est une norme sur E et pour tous $x, y \in E$, on a :

- $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ « inégalité de Cauchy-Schwarz » ;
- $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff (x, y)$ liée ;
- $4\langle x, y\rangle = \begin{cases} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \text{ou} & \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$ « identité de polarisation ».

Exemple 1 (espaces de fonctions réelles ou complexes)

Soit A un ensemble. On pose : $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in A} |f(x)| \le +\infty$ pour toute application $f\colon A \to \mathbb{K}$.

L'application $\|\ \|_\infty$ se restreint en une norme sur l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ formé des applications bornées de A dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2 (espaces de suites de nombres réels ou complexes)

(a) Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose : $\|(a_n)_{n\ge0}\|_p := \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p\Big)^{1/p} \le +\infty$ pour tout $(a_n)_{n\ge0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On note : $l^p_{\mathbb{K}} := \big\{(a_n)_{n\ge0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|(a_n)_{n\ge0}\|_p < +\infty\big\}$.
L'application $\|\ \|_p$ se restreint en une norme sur l'espace vectoriel complexe $l^p_{\mathbb{K}}$ et $\|\ \|_2$ est associée à un produit scalaire sur $l^2_{\mathbb{K}}$.

(b) On note : $l^\infty_{\mathbb{K}} := \big\{(a_n)_{n\ge0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|(a_n)_{n\ge0}\|_\infty < +\infty\big\}$ l'espace vectoriel des suites bornées.
L'application $\|\ \|_\infty$ se restreint en une norme sur l'espace vectoriel complexe $l^\infty_{\mathbb{K}}$.

Exemple 3 (suites de nombres réels ou complexes nulles à partir du $n+1^{\text{e}}$ terme)

(a) Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose : $\|(x_1, ..., x_n)\|_p := (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$ pour $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.
L'application $\|\ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $\|\ \|_2$ est associée à un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$.
(b) On note : $\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty := \max(|x_1|, ..., |x_n|)$ pour $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.
L'application $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

($\star$) On verra plus tard que toutes les normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.
($\star\star$) Des distances d_1 et d_2 associées à des normes N_1 et N_2 sur E sont topologiquement équivalentes (resp. uniformément équivalentes, Lipschitz-équivalentes) si et seulement si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Définition

On se donne une norme $\| \ \|_E$ sur E.

(a) Soient $a, b \in E$. Le *segment* $[a,b]$ est l'ensemble suivant : $[a,b] := \big\{a + t(b-a) \ ; \ t \in [0,1]\big\}$.

(b) On dit qu'une partie U de E est *convexe* si : $[a,b] \subseteq U$ pour tous $a, b \in U$.

Définition-Proposition

On se donne des normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ sur E et F.

L'espace vectoriel produit $E \times F$, formé des couples (v,w) avec $v \in E$ et $w \in F$, est muni de la *norme* 2 *du produit* $\| \ \|_{E\times F}$ définie par : $\|(v,w)\|_{E\times F} := \sqrt{\| \ v\|_E^2 + \|w \ \|_F^2}$ pour tout $(v,w) \in E \times F$.(*)

Définition

On se donne une norme $\| \ \|_E$ sur E.

(a) On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E converge vers un élément l de E si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\|x_n - l\|_E < \varepsilon$ dès que $n > N$. $\longleftarrow$[signifie que : $\|x_n - l\|_E \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$]

(b) On dit qu'une série $(\sum a_n)_{n\geq 0}$ dans E, c'est à dire une suite de la forme $\Big((a_n)_{n\geq 0}, (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)_{n\geq 0}\Big)$ avec $a_n \in E$ pour tout $n \geq 0$, converge normalement si la série $(\sum \|a_n\|_E)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition (voir (a) et (b) comme des définitions, en attendant la définition de la continuité)

On se donne des normes $\| \ \|_E$, $\| \ \|_F$, $\| \ \|_G$ sur E, F, G, et deux normes N_1 et N_2 sur E.

(a) Une application linéaire $u\colon E \to F$ est continue si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\|u(x)\|_F \leq k\,\|x\|_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Ainsi N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $\mathrm{id}_E\colon (E, N_1) \to (E, N_2)$ est bicontinue.

(b) Lorsque E est de dimension finie : toute application linéaire de E dans F est continue (une base $(e_1, ..., e_n)$ de E fournit une norme $N\colon \sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i e_i \mapsto \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$ qui s'avère équivalente à $\| \ \|_E$).

(c) Une application bilinéaire $\pi\colon E \times F \to G$ est continue si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\|\pi(x,y)\|_G \leq k\,\|x\|_E\,\|y\|_F \quad \text{pour tout } (x,y) \in E \times F.$$

(d) La somme de $E \times E$ dans E et la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K} \times E$ dans E sont des applications continues (cas particuliers respectivement de (a) et de (c)).

Définition-Proposition

On se donne des normes $\| \ \|_E$, $\| \ \|_F$, et $\| \ \|_G$ sur E, F, et G.

(a) On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace vectoriel formé des applications linéaires continues de E dans F. On pose : $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. C'est le sous-espace vectoriel de E^* formé des formes linéaires continues.

(b) On appelle *norme subordonnée à* $\| \ \|_E$ *et* $\| \ \|_F$ la norme $\| \ \|$ sur $\mathscr{L}(E,F)$ définie par :

$$\|u\| := \underbrace{\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}}}_{\text{(ce sup dans } \mathbb{R}^+ \text{ vaut par convention 0 quand } E=\{0\})} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \quad \text{pour tout } u \in \mathscr{L}(E,F). \qquad (**)$$

En particulier, on a : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$, alors $\|u(x)\|_F \leq \|u\|\|x\|_E$.

(c) Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$.

$(*)$ Comme les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, cette norme $\| \ \|_{E\times F}$ est équivalente aux normes $(v,w) \mapsto \| \ v\|_E + \|w \ \|_F$ et $(v,w) \mapsto \max(\| \ v\|_E, \|w \ \|_F)$ sur $E \times F$.

$(**)$ Le nombre $\|u\|$ est donc le plus petit réel $k \geq 0$ vérifiant : $\|u(x)\|_F \leq k\,\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.