$\underbrace{\text{Espaces topologiques compacts}}_{\text{(à connaître dans le cas des espaces métriques)}}$: à retenir (J-Y D)

On considère un espace topologique X et un espace métrique E.

Définition

(a) On appelle *recouvrement de* X une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Dans ce cas, un *sous-recouvrement de* $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X de la forme $(A_j)_{j\in J}$ avec $J \subseteq I$.

(b) On dit que l'espace topologique X est *compact* si X est séparé et tout recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X à l'aide d'ouverts U_i a un sous-recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ avec J fini.

(c) On appelle *suite extraite* d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E une suite de la forme $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ où $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}$.

Lemme

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E.
Les valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ sont les limites des suites extraites de $(x_n)_{n\geq 0}$ qui convergent.

Proposition

(a) Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.
Toute partie fermée d'un espace topologique compact est compacte.

(b) L'image d'une application continue d'un espace topologique compact dans un espace topologique séparé est compacte. En particulier, une bijection continue d'un espace topologique compact dans un espace topologique séparé est un homéomorphisme, car elle envoie un fermé sur un fermé.

(c) Un produit d'espaces topologiques compacts est compact (« théorème de Tychonoff »).

Proposition

(a) L'espace métrique E est compact si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E possède une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge (« théorème de Bolzano-Weierstrass »).

(b) Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique est uniformément continue (« théorème de Heine »).

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Les parties compactes de $\mathbb{K}^n$ sont ses parties fermées et bornées pour $\|\ \|_\infty$.

(b) Une partie compacte non-vide de $\mathbb{R}$ a donc un plus petit élément et un plus grand élément. En particulier, toute application continue d'un espace topologique compact non-vide dans $\mathbb{R}$ prend une plus petite et une plus grande valeur. A fortiori tout espace métrique compact est borné.

(c) Toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.$^{(\star)}$
En particulier, on peut remplacer $\|\ \|_\infty$ dans le (a) ci-dessus par n'importe quelle norme sur $\mathbb{K}^n$.

$(\star)$ Une norme N sur $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\ \|_\infty$ est $\underbrace{\text{lipschitzienne}}_{\text{grâce à l'inégalité } |N(u)-N(v)| \leq N(u-v)}$ car $N(x) \leq \big(\sum_{1\leq i\leq n} N(e_i)\big)\|x\|_\infty$ pour $x \in \mathbb{K}^n$, où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique, donc $1/N$ est majoré sur la sphère unité pour $\|\ \|_\infty$ qui est compacte.