Différentielle, formules de Taylor : à retenir (J-Y D)

Soient E, E_1, ..., E_l et F, F_1, ..., F_m, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
On fixe des bases $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ de E et $\mathscr{C} = (v_1, \ldots, v_q)$ de F.

Définition-Proposition

On considère une application $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ et $a \in U$.

(a) On dit que f est *différentiable en a* s'il existe $l \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + l(h) + o(\|h\|). \quad \longleftarrow \Big[\text{signifie ici : } \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)-l(h)}{\|h\|} = 0\Big]$$

Dans ce cas, on note $(\mathrm{D}f)(a) := l$ (unique) et obtient : $\longleftarrow$ [on notera parfois « $\mathrm{D}f_a$ » à la place de « $(\mathrm{D}f)(a)$ »]

f est continue en a et $\underbrace{((\mathrm{D}f)(a))(h)}_{\text{noté } (\mathrm{D}f)(a)\cdot h} = \underbrace{\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}}_{\text{« dérivée directionnelle » notée } \partial_h f(a)}$ pour tout $h \in E$, $\longleftarrow [(\mathrm{D}f)(a)\cdot h = h\, f'(a) \text{ si } E = \mathbb{R}]$

puis on appelle *dérivées partielles de f en a* les vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+tu_j)-f(a)}{t}$ quand $1 \leq j \leq p$.

(b) On dit que f *est différentiable* si elle est différentiable en tout point de U.
Dans ce cas, on appelle *différentielle de f* l'application $\mathrm{D}f\colon x \in U \mapsto \mathrm{D}f(x) \in \mathscr{L}(E,F)$.

On définit par récurrence l'ensemble des applications n-fois différentiables de U dans F ($n \in \mathbb{N}$).
On dit que f *est de classe C^n* quand f est n-fois différentiable et $\mathrm{D}^n f$ est continue.

Exemple

Toute application linéaire (continue) $l\colon E \to F$ est différentiable et $(\mathrm{D}l)(a) = l$ pour tout $a \in E$.

Proposition

a) Si une application $\overbrace{f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F \text{ est différentiable en un point } a \text{ de } U}^{\text{signifie que } \widetilde{f}\colon (x_1,\ldots,x_p)\mapsto(f_1(x),\ldots,f_q(x)) \text{ est diff. en } (a_1,\ldots,a_p), \text{ où } x = x_1u_1+\ldots+x_pu_p \text{ et } a = a_1u_1+\ldots+a_pu_p}$, elle vérifie :

$$\overbrace{\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\,(\mathrm{D}f)(a)}^{\mathfrak{Mat}_{\text{bases can.}}\mathrm{D}\widetilde{f}_{(a_1,\ldots,a_p)}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}} \quad \text{où} \quad \underset{/\mathscr{C}}{f(x)}\left|\begin{matrix} f_1(x)\\ \vdots \\ f_q(x)\end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i(a+tu_j)_{|t=0}}.$$

D'où : $\boxed{(\mathrm{D}f)(a)\cdot h = \big((h_1\tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_p\tfrac{\partial}{\partial x_p})f\big)(a)}$ pour $h = h_1u_1 + \cdots + h_pu_p \in E$.

complément au cours

(b) Une application $f\colon \begin{array}{ccc} \underset{\text{ouvert de } E_1\times\cdots\times E_l}{U} & \longrightarrow & F_1\times\cdots\times F_m \\ (x_1,\ldots,x_l) & \longmapsto & \big(f_1(x_1,\ldots,x_l),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_l)\big)\end{array}$ est différentiable en $a = (a_1,\ldots,a_l) \in E_1\times\cdots\times E_l$ si et seulement si f_1, ..., f_m sont différentiables en a.

Dans ce cas, on a : $(\mathrm{D}f)(a)\cdot h = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_l f_1(a)\\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_l f_m(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_l\end{pmatrix}$ pour $h = \begin{pmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_l\end{pmatrix} \in E_1\times\cdots\times E_l$

où $\partial_j f_i(a)$ est la différentielle en a_j de l'application $x_j \mapsto f_i(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots,a_l)$.

(c) Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ différentiable en $a \in U$ et $g\colon \underset{\substack{\text{ouvert de } F\\ \text{contenant } f(U)}}{V} \longrightarrow G$ différentiable en $f(a)$.

L'application $g \circ f$ est différentiable en a, avec :

$\boxed{\mathrm{D}(g\circ f)(a) = \mathrm{D}g(f(a)) \circ (\mathrm{D}f)(a)}$ ce qui donne matriciellement $\dfrac{\partial \overbrace{z_i}^{\text{coordonnées de } z = g(y)}}{\partial \underbrace{x_j}_{\text{coordonnées dans } E}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial\, z_i}{\partial \underbrace{y_k}_{\text{coordonnées dans } F}} \frac{\partial \overbrace{y_k}^{\text{coordonnées de } y = f(x)}}{\partial x_j}$

(en se plaçant aux points adéquats) pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq p$.

Proposition

On considère une application $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$, $a \in U$, et $n \geq 1$.

(a) On suppose que f est différentiable et que $\mathrm{D}^2 f(a)$ est définie.
Dans ce cas : $\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\big)(a)$ pour tous $i, j \in \{1,..,p\}$ (« théorème de Schwarz »).

(b) On a : $\boxed{f \text{ est de classe } \mathrm{C}^n \text{ si et seulement si } f \text{ a } p^n \text{ dérivées partielles } n^{\text{e}} \text{ continues}}$. $\longleftarrow$ [cf. $n = 1$]

complément au cours

Proposition

On se donne une application m-linéaire $\pi\colon \begin{array}{ccc} F_1\times\cdots\times F_m & \to & G \\ (y_1,\dots,y_m) & \mapsto & y_1\bullet\dots\bullet y_m\end{array}$ (« produit »).

Si des applications $f_k\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F_k$ avec $1\le k\le m$ sont différentiables en a, alors l'application $f_1\bullet\dots\bullet f_m\colon \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f_1(x)\bullet\dots\bullet f_m(x)\end{array}$ est différentiable en a, et pour tout $h\in E$ on a :

$$\boxed{\mathrm{D}(f_1\bullet\dots\bullet f_m)(a)\cdot h \;=\; (\mathrm{D}(f_1)(a)\cdot h)\bullet f_2(a)\bullet\dots\bullet f_m(a) \;+\;\cdots\;+\; f_1(a)\bullet\dots\bullet f_{m-1}(a)\bullet(\mathrm{D}(f_m)(a)\cdot h)}.$$

Exemple (généralisable au cas de la différentielle n^{e})

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ deux fois différentiable, $a\in U$ et $h,k\in E$.

On calcule $(\mathrm{D}^2 f(a)\cdot h)\cdot k$ en différentiant $\mathrm{D}f(x)\bullet k$ au point $x=a$ et prenant la valeur en h :

$$(\mathrm{D}^2 f(a)\cdot h)\cdot k = \Big((h_1\tfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_p\tfrac{\partial}{\partial x_p})(k_1\tfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+k_p\tfrac{\partial}{\partial x_p})f\Big)(a) \text{ pour } h=\sum_{j=1}^p h_j u_j\in E \text{ et } k=\sum_{j=1}^p k_j u_j\in E.$$

Proposition (« inégalité des accroissements finis »)

⟵[il n'y a pas de « théorème des accroissements finis » ici]

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ différentiable, $a\in U$ et $h\in E$.

Si $[a,a+h]\subseteq U$, on a : $\boxed{\|f(a+h)-f(a)\| \le \sup_{0\le t\le 1}\|\mathrm{D}f(a+th)\|\times\|h\| \;\le +\infty}$.

Ainsi, quand pour tous $a,b\in U$ il existe une application continue $\gamma\colon[0,1]\to U$ telle que $\gamma(0)=a$ et $\gamma(1)=b$, on a : $\boxed{f \text{ est constante si et seulement si } \mathrm{D}f=0}$.

$\leftarrow\Big[\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{t-t_0}=0 \text{ si } \Big\{\begin{smallmatrix}\mathrm{D}f=0\\ |t-t_0|>0 \text{ petit}\end{smallmatrix}\Big]$

Remarque (« gradient » ∇f d'une fonction réelle f différentiable)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On note : $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_p}(x))$ pour $x\in U$.

Si $[a,b]\subseteq U$, il existe $c\in[a,b]$ tel que : $f(b)-f(a)=\nabla f(c)\cdot(b-a)$. $\leftarrow$ [Étudier $g\colon t\in[0,1]\mapsto f((1-t)a+tb)$]

Théorème (« convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient $f_n\colon \underset{\text{ouvert convexe de } E}{U} \longrightarrow F$, $n\in\mathbb{N}$, des applications différentiable telles qu'il existe $x_0\in U$ pour lequel la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\ge0}$ converge, et telles que la suite $(\mathrm{D}f_n)_{n\ge0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n\ge0}$ converge uniformément sur toute partie bornée B de U, vers une fonction différentiable f telle que : $\mathrm{D}f(x)\cdot h = \big(\lim_{n\to+\infty}\mathrm{D}(f_n)(x)\big)\cdot h = \lim_{n\to+\infty}(\mathrm{D}(f_n)(x)\cdot h)$ pour $x\in U$ et $h\in E$.

Théorème (« théorème de Taylor-Young »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ $n-1$-fois différentiable ($n\ge1$), et $a\in U$ tel que $\mathrm{D}^n f(a)$ est définie.

On a : $\boxed{f(a+h) \underset{h\to0}{=} f(a) + \frac{(\mathrm{D}f)(a)}{1!}\cdot h + \cdots + \frac{\mathrm{D}^n f(a)}{n!}\cdot h^n + o\big(\|h\|^n\big)}$ (avec unicité du DL_n $^{(\star)}$),

où $\mathrm{D}^n f(a)\cdot h^n := (\dots(\underbrace{\mathrm{D}^n f(a)}_{\text{application } n\text{-linéaire symétrique de } E \text{ dans } F}\cdot h)\dots)\cdot h = \Big(\underbrace{(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_p\frac{\partial}{\partial x_p})^n}_{\text{à développer par la formule du binôme}} f\Big)(a)$ quand $\underset{/\mathscr{B}}{h}\left|\begin{matrix}h_1\\ \vdots\\ h_p\end{matrix}\right. \in E$.

Théorème (« inégalité de Taylor-Lagrange »)

⟵[il n'y a pas de « théorème de Taylor-Lagrange » ici]

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ $n+1$-fois différentiable ($n\ge0$), $a\in U$ et $h\in E$.

Si $[a,a+h]\subseteq U$: $\boxed{\Big\|f(a+h)-\big(f(a)+\frac{(\mathrm{D}f)(a)}{1!}\cdot h+\cdots+\frac{\mathrm{D}^n f(a)}{n!}\cdot h^n\big)\Big\| \le \underbrace{\sup_{0\le t\le1}\Big\|\frac{\mathrm{D}^{n+1}f(a+th)}{(n+1)!}\Big\|}_{\le+\infty}\times\|h\|^{n+1}}$.

Théorème (« formule de Taylor avec reste intégral »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ de C^{n+1} ($n\ge0$), $a\in U$ et $h\in E$.

Si $[a,a+h]\subseteq U$: $\boxed{f(a+h)=f(a)+\frac{(\mathrm{D}f)(a)}{1!}\cdot h+\cdots+\frac{\mathrm{D}^n f(a)}{n!}\cdot h^n+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{D}^{n+1}f(a+th)\cdot h^{n+1}\,\mathrm{d}t}$.

($\star$) Si $P,Q\in\mathbb{C}_n[X_1,\dots,X_p]$ vérifient $f(a+h)\underset{h\to0}{=}P(h)+o\big(\|h\|^n\big)$ et $f(a+h)\underset{h\to0}{=}Q(h)+o\big(\|h\|^n\big)$, alors $P=Q$.