Extremums locaux : à retenir (J-Y D)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie p.

Définition

Soient $A \subseteq E$, f une application de A dans $\mathbb{R}$, et $a \in A$.

(a) On dit que f admet *un maximum global (resp. un minimum global) au point* a si :

$$\forall x \in A \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\text{resp.} \quad \forall x \in A \quad f(x) \geq f(a)).$$

(b) On dit que f admet *un maximum local (resp. un minimum local) au point* a s'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \cap A \quad f(x) \leq f(a) \qquad (\text{resp.} \quad \forall x \in V \cap A \quad f(x) \geq f(a)).$$

(c) On dit que f admet *un extremum global (resp. un extremum local) au point* a si f admet au point a un maximum global ou un minimum global (resp. un maximum local ou un minimum local).

Définition-Proposition

Soient U un ouvert de E, f une application de U dans $\mathbb{R}$, et $a \in U$.
On suppose que f est différentiable en a.

(a) On dit que f admet *un point critique au point* a si $\mathrm{D}f(a) = 0$.

(b) Si f admet un extremum local en a, alors f admet un point critique en a.

Définition

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, et $a \in U$ tel que $\mathrm{D}^2 f(a)$ est définie.
On suppose que f admet un point critique en a.$^{(\star)}$

(a) On appelle *matrice hessienne de f en a dans une base $\mathscr{B}$ de E* la matrice symétrique :

$$\operatorname{Hess} f(a) := \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\underbrace{h \mapsto \mathrm{D}^2 f(a) \cdot h^2}_{\text{forme quadratique sur } E}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \text{où } (x_k)_{1 \leq k \leq p} \text{ sont les coordonnées suivant } \mathscr{B}.$$

(b) On appelle *signature de f en a* la signature (s, t) de la forme quadratique $\operatorname{Hess} f(a)$.
On dit que le point critique a de f est *non dégénéré* si la matrice $\operatorname{Hess} f(a)$ est inversible.

Proposition

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, et $a \in U$ tel que $\mathrm{D}^2 f(a)$ est définie.
On suppose ici que f admet un point critique en a.

(a) Si f admet un minimum local (resp. maximum local) en a, alors la forme quadratique $\operatorname{Hess} f(a)$ est positive (resp. négative). $\longleftarrow$ signifie que $(s,t) = (k,0)$ (resp. $(s,t) = (0,k)$) pour un certain $k \in \{0, 1, ..., p\}$

(b) Si la forme quadratique $\operatorname{Hess} f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum local (resp. maximum local) en a. $\longleftarrow$ signifie que $(s,t) = (p,0)$ (resp. $(s,t) = (0,p)$)

Remarque (très utile)

Une matrice symétrique réelle $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$ est définie positive si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{pour tout } k \in \{1, ..., p\}.^{(\star\star)}$$

$(\star)$ Cette hypothèse sera indispensable quand on voudra définir *la forme quadratique hessienne* d'une application f allant d'une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, sur l'espace tangent d'un point (critique) a.

$(\star\star)$ Pour l'implication délicate, on pose $\varphi(X, Y) := {}^t XAY$ quand $X, Y \in \mathbb{R}^p$ et raisonne par récurrence finie sur k. Soient $k \in \{1, ..., p\}$ et $(v_1, ..., v_k)$ une base φ-orthonormée de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. On fixe v non-nul dans le φ-orthogonal de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ (droite). On a $v \notin \mathbb{R}^k \times \{0\}$ puis $\varphi(v, v) > 0$ au vu de la matrice de φ dans $(v_1, ..., v_k, v)$. La base $\left(v_1, ..., v_k, \frac{v}{\sqrt{\varphi(v,v)}}\right)$ de $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ est φ-orthonormée. Variante : $\varphi_{|(\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\})^2}$ a pour signature $(k+1, 0)$.

Inversion locale et fonctions implicites : à retenir (J-Y D)

Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$, et $a \in U$ tel que $Df(a)$ est définie.

(a) On appelle *matrice jacobienne de f en a dans des bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F* la matrice :

$$\operatorname{Jac} f(a) := \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le q\\ 1\le j\le p}} \quad \text{où } \underset{/\mathscr{C}}{f(x)} \left| \begin{array}{l} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{array} \right. \text{ et } (x_j)_{1\le j\le p} \text{ sont les coordonnées suivant } \mathscr{B}.$$

(b) On appelle *rang de f en a* le rang de $Df(a)$, c'est-à-dire le rang de $\operatorname{Jac} f(a)$.(⋆)

Quand $p = q$, on appelle *jacobien de f en a* le nombre réel $\frac{D(f_1,\dots,f_p)}{D(x_1,\dots,x_p)}(a) := \det \operatorname{Jac} f(a)$.

Définition

On dit qu'une application $\varphi\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } F}{V}$ est *un C^n-difféomorphisme* si :

$$\varphi \text{ est une bijection, } \varphi \text{ est de classe } \mathrm{C}^n, \text{ et } \varphi^{-1} \text{ est de classe } \mathrm{C}^n.$$

Théorème (« théorème d'inversion locale »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ de classe C^n et $a \in U$.

Si $Df(a)$ est bijective, alors il existe un ouvert U_0 de E contenant a inclus dans U et un ouvert V_0 de F contenant $f(a)$ tels que f se restreint en un C^n-difféomorphisme $f_0\colon \begin{array}{rcl} U_0 & \to & V_0 \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

[La réciproque est vraie, et immédiate.]

Théorème (« théorème d'inversion globale »)

Soit $f\colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ de classe C^n.

Si f est injective et $Df(x)$ est bijective pour tout $x \in U$, alors la partie $V := f(U)$ de F est ouverte et l'application $\varphi\colon \begin{array}{rcl} U & \to & V \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un C^n-difféomorphisme.

[La réciproque est vraie, et immédiate.]

Théorème (« théorème des fonctions implicites »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } E\times F}{\Omega} \longrightarrow G$ de classe C^n et $(a,b) \in \Omega$.

On suppose que $f(a,b) = 0$ et la différentielle partielle $\underbrace{\partial_2}_{\text{par rapport à « la fonction implicite » } y} f(a,b)$ de f en (a,b) est bijective.

Alors il existe un ouvert de $E \times F$ de la forme $\underset{\text{ouvert de } E}{U} \times \underset{\text{ouvert de } F}{V}$ contenant (a,b) inclus dans Ω et une application $\varphi\colon U \to V$ de classe C^n, tels que pour tout $x \in U$ l'équation $f(x,y) = 0$ d'inconnue $y \in V$ a pour unique solution $\varphi(x)$.(⋆⋆)

De plus : $\varphi(a) = b$ et $\underbrace{\boxed{D\varphi(a) = -\big(\partial_2 f(a,b)\big)^{-1} \circ \partial_1 f(a,b)}}_{\text{se retrouve en pensant à « } 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, \underbrace{\varphi(x)}_{\mathrm{y}}) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ »}}$.

(⋆) Afin d'étudier le rang de f en a lorsque a varie, il peut être utile d'utiliser le critère suivant : le rang d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ est l'ordre maximal des matrices carrées inversibles extraites de M.

(⋆⋆) Géométriquement cela signifie que : si $\big(Df(a,b)\big)^{-1}(\{0\})$ est un graphe « $y =$ fonction (linéaire) de x » alors $f^{-1}(\{0\})$ est localement un graphe « $y =$ fonction (de classe C^n) de x ».