

Espaces de Hilbert : à retenir (J-Y D)

On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition

On se donne un espace vectoriel E .

On appelle *produit scalaire sur E* une application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ de E^2 dans \mathbb{K} telle que

- (i) l'application $x \mapsto \overline{\langle x, y \rangle}$ est linéaire pour tout $y \in E$;
- (ii) on a : $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ pour tous $x, y \in E$;
- (iii) on a : $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $(\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Dans ce cas l'*orthogonal* d'une partie A de E est : $A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A \langle x, a \rangle = 0\}$.

Définition-Proposition

(a) On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.

Dans ce cas, $x \in E \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}^+$ est une norme sur E et pour tous $x, y \in E$, on a :

- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ « inégalité de Cauchy-Schwarz » et $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff (x, y)$ liée ;
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ quand $\langle x, y \rangle = 0$ « théorème de Pythagore » ; \leftarrow [on a : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x, y \rangle$]
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ « identité du parallélogramme » ; \leftarrow [la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés]
- $4\langle x, y \rangle = \begin{cases} \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$ « identité de polarisation ».

(b) On appelle *espace de Hilbert* un espace préhilbertien qui est complet.

Exemples

Soient I un ensemble et (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. On note $l_{\mathbb{K}}^2(I) := \{(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I \mid \sum |a_i|^2 < +\infty\}$.

(a) L'espace vectoriel $l_{\mathbb{K}}^2(I)$ muni de $\langle (a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \rangle := \sum_{i \in I} a_i \overline{b_i}$ est un espace de Hilbert.

(b) L'espace vectoriel $L_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ muni de $\langle f, g \rangle := \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(x)$ est un espace de Hilbert.

Proposition

Soient E un espace de Hilbert et C un convexe fermé non-vidé de E .^(*)

(a) Pour tout $x \in E$, il existe un unique $x_0 \in C$ tel que : $d(x, x_0) = d(x, C)$.

On notera $p_C(x) := x_0$ et dira que $p_C(x)$ est la *projection de x sur le convexe C* .

(b) Soit $x \in E$. Le vecteur $p_C(x)$ est l'unique $x_0 \in C$ vérifiant : $\operatorname{Re}\langle \overrightarrow{x_0 x}, \overrightarrow{x_0 c} \rangle \leq 0$ pour $c \in C$.

(c) L'application $p_C : E \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne.

Proposition

Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E .^(**)

(a) Pour tout $A \subseteq E$, la partie A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de E .

(b) Soit $x \in E$. Le vecteur $p_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

(c) On a : $(F^\perp)^\perp = F$ et $F \oplus F^\perp = E$.

En particulier, pour tout $A \subseteq E$, on a : $\overline{\operatorname{Vect} A} = E \iff A^\perp = \{0\}$. \leftarrow [remarquer que $\overline{(\operatorname{Vect} A)^\perp} = A^\perp$]

(d) Ainsi la projection $p_F : E \rightarrow F$ de E sur le convexe F est la restriction de la projection linéaire $\widehat{p}_F : E \rightarrow E$ de E sur F parallèlement au sous-espace vectoriel fermé F^\perp de E .

Théorème (« théorème de représentation de Riesz »)

Soit E un espace de Hilbert.

On note E' l'espace vectoriel normé formé des applications linéaires continues de E dans \mathbb{K} .

L'application \mathbb{R} -linéaire $E \rightarrow E'$ est bijective et conserve la norme.

$$y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$$

(*) L'hypothèse « E est un espace préhilbertien et C est un convexe complet non-vidé de E » suffit.

(**) L'hypothèse « E est un espace préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel complet de E » suffit.

Définition-Proposition

Soient E un espace vectoriel normé et I un ensemble.

Soient $(a_i)_{i \in I} \in E^I$ et $a \in E$. On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I .

(a) On dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est *sommable* de somme a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathcal{P}_f(I) \quad \forall J' \in \mathcal{P}_f(I) \quad \left(J' \supseteq J \implies \left\| \sum_{j' \in J'} a_{j'} - a \right\| < \varepsilon \right)$$

Dans ce cas, on note : $\sum_{i \in I} a_i = a$. ← [en particulier : $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si $I = \mathbb{N}$ et $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ si $I = \mathbb{Z}$]

(b) On note $I' = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$. La famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si, soit I' est fini, soit I' est dénombrable et pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I'$ la série $(\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge.

Dans ce cas, en supposant I' dénombrable, on a : $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I'$.

(c) On suppose ici que $E = \mathbb{K}$ et note m la mesure de comptage sur $(I, \mathcal{P}(I))$.

On a : $(a_i)_{i \in I} \in \underbrace{l_{\mathbb{K}}^1(I, m)}_{\text{noté } l_{\mathbb{K}}^1(I)}$ si et seulement si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable ; dans ce cas : $\sum_{i \in I} a_i = \int_I a_i dm(i)$.

Définition

Soient E un espace préhilbertien, et $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée dans E .

On dit que la famille orthonormée $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de E si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes (i), (ii) et (iii) suivantes :

(i) $\overline{\text{Vect}\{e_i\}_{i \in I}} = E$;

(ii) $\forall x \in E \quad \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$ « égalité de Parseval » ; ← [l'« inégalité de Bessel » \leq est toujours réalisée]

(iii) $\forall x \in E \quad (\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i = x$.

Exemples

(a) L'espace de Hilbert $l_{\mathbb{K}}^2(I)$ admet pour base hilbertienne la famille $(\delta_i)_{i \in I}$ définie par :

$$\delta_i(j) = 0 \quad \text{si } j \neq i \quad \text{et} \quad \delta_i(i) = 1.$$

(b) L'espace de Hilbert $L_{\mathbb{C}}^2([0, 2\pi])$ admet pour base hilbertienne la famille $(e^{in})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Théorème

Soit E un espace de Hilbert.

(a) L'espace de Hilbert E possède une base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$.^(*)

Dans ce cas $E \rightarrow l_{\mathbb{K}}^2(I)$ est une bijection de réciproque $l_{\mathbb{K}}^2(I) \rightarrow E$ avec $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$.
 $x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i e_i$

(b) Toutes les bases hilbertiennes de E ont même cardinal.

On appelle *dimension hilbertienne* de E ce cardinal.

Proposition (« procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt »)

Soit E un espace préhilbertien qui a une partie dénombrable dense $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$.

Il existe une famille libre $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de vecteurs de E , avec $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{N}' = \{1, \dots, N\}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, telle que $\text{Vect}(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ est dense de E (par exemple extraite de $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$).^(**)

On construit une base hilbertienne finie ou dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de E ainsi :

$$w_n = v_n - \underbrace{\sum_{1 \leq k \leq n-1} \langle v_n, e_k \rangle e_k}_{\text{projection orthogonale de } v_n \text{ sur } \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})} \quad \text{et} \quad e_n = \frac{w_n}{\|w_n\|} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

Il s'agit de l'unique suite orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ dans E telle que :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \quad \text{et} \quad \langle e_n, v_n \rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

(*) Il existe un espace préhilbertien (sans partie dénombrable dense) qui n'a aucune base hilbertienne. Un contre-exemple se trouve dans Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitre V, §2, exercice 2.

(**) Par exemple : $v_n = x_{\alpha(n)}$ où $\alpha(n) = \inf\{p \in \mathbb{N} \mid (v_1, \dots, v_{n-1}, x_p) \text{ libre}\}$.