

Séries de Fourier : à retenir (J-Y D)

groupe quotient

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, 2\}$. On note : $\mathbb{T} = \overbrace{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{T}) := \{f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$
 et $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique et } \|f\|_p := (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt)^{1/p} < +\infty\}$.

Rappel 1 (« théorème convergence uniforme + continuité »)

Soient Ω un espace topologique, $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, et $a \in \Omega$.

On suppose que $\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ est continue en } a \text{ pour tout } n \geq 0; \\ (f_n)_{n \geq 0} \text{ converge uniformément vers } f. \end{array} \right.$

Alors f est continue en a .

Rappel 2 (« théorème convergence uniforme + dérivabilité »)

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle infini et $f_n: I \rightarrow \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ est dérivable pour tout } n \geq 0; \\ \text{il existe } x_0 \in I \text{ pour lequel la suite } (f_n(x_0))_{n \geq 0} \text{ converge;} \\ \text{la suite } (f'_n)_{n \geq 0} \text{ converge uniformément.} \end{array} \right.$

Alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de I vers une fonction dérivable f telle que : $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$ pour tout $x \in I$.

Proposition

Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$.

On pose : $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(a) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty$ alors $(S_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

(b) Si $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont des suites de réels décroissantes de limite 0, alors $(S_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de $]0, 1[$.

(c) Si $(S_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur \mathbb{R} , vers une application notée f , alors $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et, $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ se déduisent de f par les formules intégrales du (a) ci-dessous.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

(a) On pose : $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$,

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$ pour $n \geq 1$. (*)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f* la fonction

$S_n(f)$ déterminée par : $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

Théorème (« théorème de Riemann-Lebesgue »)

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

La « suite » $\widehat{f} := (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à $c_0(\mathbb{Z}) := \{(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0\}$.

Théorème

La transformation de Fourier $\mathcal{F}_{L^1(\mathbb{T})}: L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$ est linéaire, injective et continue.

$$f \mapsto \widehat{f} \quad c_0(\mathbb{Z}) \text{ est muni de } \|\cdot\|_\infty$$

(*) Ainsi : $\widehat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$, $\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $\widehat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}$ pour $n \geq 1$;
 $a_0 = 2\widehat{f}(0)$, $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \widehat{f}(-n) e^{-inx} + \widehat{f}(n) e^{inx}$ pour $n \geq 1$.

Théorème (« théorème de Fejér »)

Soit f un élément de $E := \mathcal{C}(\mathbb{T})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. ← [cet énoncé reste valable en prenant $E := L^1(\mathbb{T})$ muni de $\|\cdot\|_1$]

La suite $(\frac{S_0(f)+\dots+S_n(f)}{n+1})_{n \geq 0}$ converge dans E vers f .

Remarques

(a) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On pose $\sigma_n = \frac{u_0+\dots+u_{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$.

Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ « lemme de Césàro ».

Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{T}$. Si $(S_n(f)(x_0))_{n \geq 1}$ converge, on a donc $S_n(f)(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$.

(b) Le th. de Fejér redonne la densité de l'algèbre des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (conséquence du th. de Stone-Weierstrass) et l'injectivité de la transformation de Fourier. (*)

Théorème (« théorème de Dirichlet »)

Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes (qui portent sur $f|_{\text{voisinage de } x_0}$) :

- (i) f a des limites finies $f(x_0^-)$ à gauche en x_0 et $f(x_0^+)$ à droite en x_0 ;
- (ii) $h > 0 \mapsto \frac{f(x_0-h)-f(x_0^-)}{h}$ et $h > 0 \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0^+)}{h}$ ont des limites finies en 0^+ .

(cela est réalisé lorsque la fonction $f|_{[0,2\pi]}$ est C^1 par morceaux, au sens où il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = 2\pi$ tels que pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$ l'application $f|_{[a_{k-1}, a_k]}$ a un prolongement de classe C^1 à $[a_{k-1}, a_k]$)

Alors
$$S_n(f)(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}. \quad (**)$$

Proposition

La famille $(e^{in \cdot})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Donc $\mathcal{F}_{L^2(\mathbb{T})}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ est une bijection de réciproque $\overline{\mathcal{F}}_{l^2(\mathbb{Z})}: l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$
 $f \mapsto (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ en particulier $S_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in \cdot}$
dans $L^2(\mathbb{T})$ lorsque $f \in L^2(\mathbb{T})$ ↑ sommable pour $\|\cdot\|_2$

et on a
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$
 pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ « égalité de Bessel-Parseval ».

en marge du programme

Proposition

L'application $\overline{\mathcal{F}}_{l^1(\mathbb{Z})}: l^1(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{T})$ est linéaire, injective et continue. (***)

$$(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in \cdot}$$

↑
sommable pour $\|\cdot\|_\infty$

De plus, toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$ vérifie $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{in \cdot}$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. ← [\mathcal{F} injective]

par exemple $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, cf. la proposition ci-dessous

Proposition

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$. On a : $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. ← [penser à $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$]

En particulier : toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ est somme de sa série de Fourier (car $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$).

(*) Il redonne aussi le th. de Weierstrass : toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$ avec $a < b$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. En effet, en introduisant l'unique $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ paire vérifiant $g(\pi t) = f((1-t)a + tb)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et en fixant $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 0$ tel que $\|g - g_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ où $g_n := \frac{S_0(g)+\dots+S_n(g)}{n+1}$, puis il existe une somme partielle P du développement en série entière de g_n en 0 telle que $\|(P - g_n)|_{[0,1]}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

(**) Voici deux résultats difficiles à démontrer, relatifs à la « série de Fourier » $(S_n(f))_{n \geq 0}$ d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$:

(i) si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, alors $(S_n(f))_{n \geq 0}$ converge presque partout vers f « théorème de Carleson-Hunt » (cas $p = 2$) ;

(ii) il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ tel que $(S_n(f))_{n \geq 0}$ diverge en tout point « contre exemple de Kolmogorov ».

(***) L'injectivité découle du (c) de la proposition du début, car pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$, la fonction continue $f: x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ vérifie $\widehat{f}(n) = c_n$ quand $n \in \mathbb{Z}$.