



CALCUL DIFFÉRENTIEL ET SÉRIES DE FOURIER

TD #1 - ESPACE VECTORIEL NORMÉ ET ESPACE MÉTRIQUE

Exercice 1 (Inégalité triangulaire inversée). Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

(*) **Exercice 2 (Normes usuelles de \mathbb{R}^n).** Pour tout vecteur $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

- 1) Montrer que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{R}^n .
- 2) Lorsque $n = 2$, dessiner la boule fermée de centre 0 et rayon 1 pour chacune de ces normes.

(*) **Exercice 3 (Normes usuelles équivalentes dans \mathbb{R}^n).** Soient $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ les normes sur \mathbb{R}^n définies dans l'exercice 2. On veut prouver que ce sont des normes équivalentes.

- 1) Montrer les inégalités ci-dessous pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

- 2) Pour chacune des six inégalités ci-dessus : montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que cette inégalité soit en fait une égalité. En déduire que les constantes dans ces inégalités ne peuvent pas être améliorées.

(*) **Exercice 4 (Normes p sur \mathbb{R}^n).**

On définit sur \mathbb{R}^n la quantité $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ pour $p > 1$.

- 1) Montrer que $(a + b)^p \leq f(t)$ pour $a, b > 0, t \in]0, 1[$ et $f(t) = t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p$. Vous pourrez au choix faire une étude de variations pour f , ou bien utiliser l'inégalité de Jensen pour la fonction $x \mapsto x^p$.
- 2) En déduire que $\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq t^{1-p}\|x\|_p^p + (1-t)^{1-p}\|y\|_p^p$ pour $t \in]0, 1[$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- 3) Montrer l'**inégalité de Minkowski** : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ en utilisant $t = \|x\|_p / (\|x\|_p + \|y\|_p)$.
- 4) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme. Justifier que c'est faux si $p \in]0, 1[$.
Regarder $x = (0, 1)$ et $y = (1, 0)$.

Exercice 5 (Équivalence entre les p normes).

- 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$, on a : $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$.
- 2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 6 (p -boules). Soit l'espace normé $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $p \in [1, \infty]$ et on note \bar{B}_p sa boule unité fermée.

- 1) Montrer que pour tout $1 \leq p \leq q$, $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$. En déduire que \bar{B}_p est incluse dans \bar{B}_q .
- 2) Soit $x \in \bar{B}_\infty \setminus \bar{B}_1$. Montrer qu'il existe $p \in (1, \infty]$ tel que $\|x\|_p = 1$.
- 3) Essayer de faire un dessin lorsque $n = 2$ qui illustre les deux propriétés ci-dessus.

Exercice 7 (Normes p en dualité). Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 1) En étudiant les variations de $f_\alpha(t) = t^\alpha - 1 - \alpha(t-1)$, montrer que $f_\alpha(t) \leq 0$ pour $\alpha \in]0, 1[, t > 0$.
- 2) Avec $\alpha = \frac{1}{p}$ et $t = \frac{a^p}{b^p}$, montrer l'**inégalité de Young** : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour $a, b > 0$.
- 3) Déduire de l'inégalité précédente que $|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q$.
- 4) Prouver l'**inégalité de Hölder** : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Commencez par supposer que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Vérifiez que l'égalité a lieu si $|y_i|^q = |x_i|^p$.
- 5) Prouver la formule de la norme duale : $\|x\|_p = \sup \{ |\langle x, y \rangle| : y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_q = 1 \}$.
- 6) En déduire simplement l'inégalité de Minkowski $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
- 7) Montrer la formule de la norme duale reste vraie si $(p, q) = (1, \infty)$ ou $(\infty, 1)$.

Exercice 8 (Norme matricielle : norme subordonnée). On définit pour $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- 1) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que de plus, c'est une norme d'algèbre : $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.
- 3) Justifier que les résultats précédents restent vrais si on considère $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

(*) **Exercice 9 (Espace de fonctions bornées et norme sup).** Soit X un ensemble non vide, et notons $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées de X dans \mathbb{R} :

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}.$$

- 1) Vérifier que $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- 2) Montrer que $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ définit une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.
- 3) À quoi correspond cet espace vectoriel et sa norme lorsque $X = \mathbb{N}$?

(*) **Exercice 10 (Espace de fonctions continues et norme intégrale).** On note $E = C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

- 1) Montrer que $\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ définit une norme sur E .
- 2) Montrer que $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$ définit une norme sur E .
- 3) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes sur E . *Indication : s'intéresser à $f_n(t) = t^n$.*

(*) **Exercice 11 (Transformée de norme).**

Soient (E, N_E) un \mathbb{R} -espace vectoriel normé et u une application \mathbb{R} -linéaire de E dans E .

- 1) Montrer que la fonction $N_E \circ u$ n'est pas toujours une norme.
- 2) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u garantissant que $N_E \circ u$ soit une norme.
- 3) On suppose que E est de dimension finie et on se donne $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E . Pour tout $x \in E$, on note x_1, \dots, x_n les coordonnées de x dans cette base \mathcal{B} (c'est-à-dire que $x = \sum_i x_i b_i$); et on définit $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Justifier que c'est une norme sur E .
- 4) On choisit l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ et u la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{4}$. Que vaut la norme ainsi obtenue? (*on retrouve une quantité bien connue*)

Exercice 12 (Norme sur un espace produit). Soit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ un espace vectoriel produit, où chaque E_i est muni de sa propre norme $\|\cdot\|_{E_i}$. On considère sur E les normes suivantes :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}^p}, \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max_i \|x_i\|_{E_i}.$$

Montrer que ce sont bien des normes sur E et qu'elles sont équivalentes entre elles.

Exercice 13 (Distance discrète). Soit X un ensemble quelconque, et définissons $d(x, y) = 0$ si $x = y$ ou $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Montrer que (X, d) est un espace métrique. Montrer que cette distance n'est pas équivalente à la métrique euclidienne.

Exercice 14 (Norme matricielle : Frobenius). On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients réels. On notera également, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\langle A, B \rangle_F = \text{tr}(A^\top B), \quad \|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle_F}.$$

- 1) Exprimer $\langle A, B \rangle_F$ en fonction des coefficients a_{ij} et b_{ij} des matrices A et B .
- 2) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\|\cdot\|_F$ est une norme.
- 3) Justifier que $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ et $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$ définissent des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 (Normes p en dimension infinie). Reprendre les idées de l'exercice 4 pour montrer que :

- 1) $\|f\|_p := (\int_0^1 |f(x)|^p)^{1/p}$ est une norme sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
- 2) $\|u\|_p := (\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|^p)^{1/p}$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$.