

I. ESPACE VECTORIEL NORMÉ ET ESPACE MÉTRIQUE (BONUS)

Norme

1) Existe-t-il une norme N sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle qu'une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} converge au sens de N si et seulement si elle converge uniformément ?
Indication : étudier la suite de fonctions $(f_n : x \mapsto \frac{x}{n+1})_{n \geq 0}$.

2) Soient $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$. Les applications suivantes sont-elles des normes ?

$$M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ ; N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ ; P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ .$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i |x_i| \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} a_i |x_i| \quad (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} |x_1| & \text{si } x_1 \neq 0 \\ |x_2| & \text{si } x_1 = 0 \end{cases}$$

3) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On considère une application $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- (i) $\forall v \in E \quad N(v) = 0 \iff v = 0$;
- (ii) $\forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$.

On pose $\tilde{B} := \{v \in E \mid N(v) \leq 1\}$.

Montrer que N est une norme si et seulement si \tilde{B} est convexe.

4) Toute norme N sur \mathbb{R}^2 possède-t-elle la propriété suivante :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (|x_1| \leq |y_1| \text{ et } |x_2| \leq |y_2| \implies N(x) \leq N(y)) ?$$

5) On pose : $\|(x_1, x_2)\|_{\frac{1}{2}} = (|x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}})^2$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ détermine-t-elle une norme sur \mathbb{R}^2 ?

6) Les normes $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $P \mapsto \|P\|_{L^\infty([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ sur $\mathbb{R}[X]$ sont-elles équivalentes ?

Espaces métriques

7) On pose : $\|(x_1, x_2)\|_{1/2} = (|x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2})^2$ pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ($\|\cdot\|_{1/2}$ n'est pas une « norme »).

Existe-t-il une distance $d_{1/2}$ sur \mathbb{R}^2 dont les boules ouvertes sont exactement les parties de la forme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\|_{1/2} < r\}$ avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$?

8) Les applications d_0, δ et \tilde{d} suivantes sont-elles des distances ?

a) Sur un ensemble E : $d_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$ pour $x, y \in E$.

b) Sur \mathbb{R} : $\delta(x, y) = |e^x - e^y|$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Sur un ensemble E muni d'une distance d : $\tilde{d}(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ pour $x, y \in E$.

9) On se place dans un espace métrique (E, d) .

Soit $A \subseteq E$. Comparer les diamètres de $\overset{\circ}{A}$ et de \overline{A} avec celui de A .

10) On considère un espace métrique non-vide (E, d) , un point Ω de E , et une partie A de E .

a) Montrer que A est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée.

b) Montrer que A est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée de centre Ω .

11) On note $\| \cdot \|_2$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 . Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$d_T(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont alignés avec } 0 \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Montrer que d_T définit une distance sur \mathbb{R}^2 (« distance TGV »).
b) Décrire géométriquement la boule ouverte $B(x, r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

12) On considère sur \mathbb{R}^2 les distances « discrète », « euclidienne » et « TGV » :
 d_0 de l'exercice 8, $d_2: (x, y) \mapsto \|x - y\|_2$ et la distance d_T de l'exercice 11.

Les distances d_0 et d_T sur \mathbb{R}^2 sont-elles topologiquement équivalentes à la distance d_2 ?

13) On munit l'ensemble $E = \{-1\} \cup [0, 1[$ de la distance induite par la distance usuelle dans \mathbb{R} .

a) Les parties suivantes A, B, C de E sont-elles ouvertes, fermées ?

$$A = \{-1\}, \quad B = [0, 1[, \quad C = [0, \frac{1}{2}].$$

Déterminer leurs intérieurs et adhérences.

- b) Comparer l'adhérence de la boule ouverte $B(0, 1)$ avec la boule fermée $\tilde{B}(0, 1)$.
c) Comparer l'intérieur de la boule fermée $\tilde{B}(0, 1)$ avec la boule ouverte $B(0, 1)$.

14) Une distance d sur un ensemble E est dite *ultramétrique* si elle vérifie :

$$\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

a) Sur l'ensemble $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes, on définit la *valuation* v par
 $v(a) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ quand $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \setminus \{0\}$ et $v(0) = +\infty$.
Montrer que l'application $d: (a, b) \mapsto 2^{-v(a-b)}$ est une distance ultramétrique sur E .

b) Montrer que dans un espace muni d'une distance ultramétrique :

- (i) tout triangle est isocèle (c'est-à-dire il a deux cotés de même longueur) ;
- (ii) n'importe quel point d'une boule ouverte ou fermée est centre de cette boule ;
- (iii) deux boules ouvertes sont soit disjointes, soit l'une incluse dans l'autre ;
- (iv) les boules fermées sont des ouverts et les boules ouvertes sont des fermés.