



## CALCUL DIFFÉRENTIEL ET SÉRIES DE FOURIER

### TD #2 - TOPOLOGIE DES ESPACES MÉTRIQUES

#### 1. BOULES

**Exercice 1 (Rigidité des boules d'un e.v.n.).** Vérifier que  $B(x, r) = x + rB(0, 1)$  et  $\bar{B}(x, r) = x + r\bar{B}(0, 1)$ .

**Exercice 2 (Boules et topologie).** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

- 1) Vérifier que  $B(x, r) \subset \bar{B}(x, r)$  et  $\bar{B}(x, r) \subset B(x, R)$  pour  $x \in X$  et  $0 < r < R$ .
- 2) Justifier que  $B(x, r) \subset \text{int } \bar{B}(x, r)$  et  $\text{adh } B(x, r) \subset \bar{B}(x, r)$ .
- 3) Trouver un exemple d'espace métrique dans lequel les deux inclusions précédentes sont strictes.
- 4) Montrer que ces deux inclusions sont en fait des égalités si  $X$  est un espace vectoriel normé.

**Exercice 3 (Distances équivalentes et boules).** Montrer que si les distances  $d_a$  et  $d_b$  sont équivalentes alors :

$$(\forall \delta > 0)(\exists r, R > 0)(\forall x \in X) \quad B_{d_a}(x, r) \subset B_{d_b}(x, \delta) \subset B_{d_a}(x, R).$$

(\*) **Exercice 4 (Bornés).** Déterminer si ces ensembles de  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  sont bornés ou pas (et le justifier).

- 1)  $A = [-1, 2] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^2$ ,
- 2)  $B = \{2\} \times [0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$ ,
- 3)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 2\}$ ,
- 4)  $D = C \cap [1, +\infty) \times [1, +\infty)$ .

#### 2. SUITES

(\*) **Exercice 5 (Suite de fonctions).** Montrer que la suite  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([0, 1], \mathbb{R})$  définie par  $f_n(t) = t^n$  :

- 1) Converge simplement vers une fonction discontinue.
- 2) Converge en norme  $\|\cdot\|_1$  vers la fonction  $f(t) \equiv 0$ . Même question pour  $\|\cdot\|_p$  avec  $p \in [1, +\infty[$ .
- 3) N'admet aucune valeur d'adhérence pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

(\*) **Exercice 6 (En dimension infinie).** Soit  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  et  $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ .

- 1) On munit  $E$  de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Montrer que  $F$  est fermé dans  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .
- 2) On munit  $E$  de la norme  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ . Montrer que  $F$  est dense dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ . En déduire que  $F$  n'est pas fermé dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ . Indication : chercher une suite  $f_n \in F$  qui converge vers  $f \notin F$  donné. On fera un dessin pour trouver l'inspiration.

#### 3. OUVERTS, FERMÉS

**Exercice 7 (L'intérieur, l'adhérence et la frontière).** Dans l'espace normé  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , déterminer (sans justifier) l'intérieur, l'adhérence et la frontière de chacun des sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 5\} & B &= [1, 3] \cup \{\pi\}, & C &= [-1, 1] \cup \{3\}, \\ D &= \mathbb{Z}, & E &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{n} \right\}, & F &= \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

(\*) **Exercice 8 (L'intérieur, l'adhérence et la frontière, densité).** Dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ , déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles suivants, et préciser lesquels sont denses :

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, & B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 \geq 0, y > x\}, \\ C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, & D &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Exercice 9 (Ensembles ouverts et fermés).** Dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ , déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière et préciser si chaque ensemble est ouvert, fermé, borné :

$$B = [1, 3] \times \{2\} \subset \mathbb{R}^2, \quad C = [-1, 1[ \times ]-1, 1] \subset \mathbb{R}^2, \\ D = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2, \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n+1[ \subset \mathbb{R}.$$

**Exercice 10.** Pour chacun des sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^2$  déterminer s'il est ouvert ou fermé ou ni ouvert ni fermé. Vous justifierez votre réponse avec une caractérisation par les suites.

- 1)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, 0 \leq y \leq 1\}$ ,
- 2)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, 0 \leq y < 1\}$ ,
- 3)  $C = \{(x, y) \mid x^2 - 2x + y^2 = 0\} \cup \{(x, 0) \mid x \in [2, 3]\}$ ,
- 4)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1, -1 < y < 1\}$ .

**Exercice 11 (Formules pour l'intérieur).** Soient  $A, B$  deux parties d'un espace métrique.

- 1) Vérifier que si  $A \subset B$  alors  $\text{int } A \subset \text{int } B$ .
- 2) Montrer que  $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ .
- 3)  $\text{int}(A \cup B) \subset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ . Chercher un exemple de cas où l'inclusion est stricte.

**Exercice 12 (Intérieur vide).** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

- 1) Montrer que l'intérieur de toute sphère est vide.
- 2) Montrer que l'intérieur de tout sous-espace vectoriel propre de  $E$  est vide.

**Exercice 13 (Topologie et somme).** Soient  $A, B$  deux parties d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$ . On définit  $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ .

- 1) Montrer que si  $A$  est ouvert, alors  $A + B$  est ouvert.
- 2) Montrer que  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$  et  $B = \{0\} \times \mathbb{R}$  sont fermées, mais que  $A + B$  ne l'est pas.

**Exercice 14 (Topologie équivalentes).** Montrer que si deux distances sont équivalentes alors elles définissent les mêmes ouverts. *Indication : on utilisera le résultat de l'exercice 3.*

**Exercice 15 (Topologie dans  $C([0, 1])$ ).** Montrer que  $U = \{f \in C([0, 1]) \mid \forall t \in [0, 1], f(t) > 0\}$  est ouvert dans  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ . *Indication : on utilisera la définition d'ouvert et le théorème de Weierstrass.*

#### 4. TOPOLOGIE AVANCÉE

**Exercice 16 (Espace métrique discret).** Soit  $X$  un ensemble muni de la distance discrète. Montrer que

- 1) les boules sont soit un singleton soit tout l'espace ;
- 2) tous les sous-ensembles sont bornés, ouverts, fermés ;
- 3) les suites convergentes sont exactement les suites constantes à partir d'un certain rang ;
- 4) les compacts sont exactement les sous-ensembles finis ;
- 5) l'espace est complet.

**Exercice 17 (Suite compacte).** Soit  $x_n \in (X, d)$  qui converge vers un point  $x$ . Montrer que l'ensemble  $K = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\}$  est compact. *Bonus : Quel compact considérer lorsque la suite ne converge pas ?*

**Exercice 18 (Les compacts se font rares).** Montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte dans  $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ . Même question dans  $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Exercice 19 (DL de l'inverse matricielle).** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de norme  $\|A\| < 1$ .

- 1) Montrer que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$  converge.
- 2) Vérifier que  $(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$ .

**Exercice 20 (Homéomorphisme).** Soit  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  bijective telle que  $f$  et  $f^{-1}$  soient continues. Montrer que  $X$  est compact si et seulement si  $Y$  l'est. Même question pour la complétude.