

II. TOPOLOGIE DES ESPACES MÉTRIQUES (BONUS)

Ouverts et fermés de \mathbb{R}^n pour la distance euclidienne, sans la continuité

- 1) a) Soit $A = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Déterminer $\overset{\circ}{A}$.
La partie A de \mathbb{R}^2 est-elle ouverte ? fermée ?
Indication : l'intérieur d'une partie de \mathbb{R}^2 est l'ensemble des centres de boules ouvertes incluses dans cette partie, et l'adhérence d'une partie de \mathbb{R}^2 est l'ensemble des limites de suites convergentes dans \mathbb{R}^2 de points de cette partie, ce qui donne deux méthodes pour répondre.
- b) Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 < y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Déterminer $\overset{\circ}{B}$.
La partie B de \mathbb{R}^2 est-elle ouverte ? fermée ?
- 2) a) Quel est l'intérieur dans \mathbb{R} du segment $[0, 1]$?
b) Quel est l'intérieur dans \mathbb{R}^2 du segment $[0, 1]$ porté par l'axe des abscisses ?
- 3) a) Montrer que l'adhérence d'un convexe de \mathbb{R}^n est un convexe de \mathbb{R}^n .
b) Ce résultat reste-t-il vrai pour l'intérieur ?
- 4) a) Soit $G \neq \{0\}$ un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. On pose $a = \inf\{x \in G \mid x > 0\}$.
Montrer que : si $a > 0$, $G = a\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z}$ est fermé dans \mathbb{R} ; si $a = 0$, G est dense dans \mathbb{R} .
b) Soit $\omega = e^{2i\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre complexe de module 1.
On pose $H = \{\omega^n ; n \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer l'adhérence de H dans \mathbb{C} .
Indication : lorsque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, étudier la partie $G := \{x \in \mathbb{R} \mid e^{2i\pi x} \in H\}$ de \mathbb{R} .

Espaces métriques compacts

- 5) a) Montrer que la partie $A := \{\frac{1}{n+1} ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ de \mathbb{R} est compacte.
b) Plus généralement, montrer qu'étant donnée une suite convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite l dans un espace métrique E , la partie $K := \{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ de E est compacte.
c) Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F .
Montrer que f est continue si et seulement si $f|_K$ est continue pour tout compact K de E .
- 6) Montrer que la boule unité fermée \tilde{B} de l'espace vectoriel normé $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte.
Indication : trouver une suite $(f_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de \tilde{B} telle que $\|f_k - f_l\|_\infty = 1$ quand $k \neq l$
- 7) a) Démontrer que les intervalles $]0, 1[$ et $[0, 1]$ ne sont pas homéomorphes.
b) Démontrer que l'intervalle $]0, 1[$ et le cercle unité S^1 de \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.
- 8) a) Démontrer que la sphère $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ de \mathbb{R}^{n+1} est compacte.
b) Démontrer que la partie $SO(n)$ de $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ formée des matrices carrées d'ordre n qui sont orthogonales et de déterminant 1 (appelée « groupe spécial orthogonal ») est compacte.
- 9) a) On note : $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ et } z = \cos(xy)\}$.
Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \Sigma$ pour lequel z est minimal.
b) Soient M_1, \dots, M_p des points de \mathbb{R}^3 .
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de \mathbb{R}^3 qui rend minimal le volume du plus petit parallélépipède rectangle $\Pi_{\mathcal{B}}$ d'arêtes parallèles à u, v, w contenant M_1, \dots, M_p .
- 10) Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\text{Supp } \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ est compact.
Démontrer que φ est uniformément continue.

- 11) Soient E un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E .
On définit $A + B := \{a + b ; a \in A \text{ et } b \in B\}$.
- a) Montrer que si A et B sont compactes, alors la partie $A + B$ de E est compacte.
À titre d'exemple, décrire précisément la partie $S^1 + S^1$ de \mathbb{R}^2 .
- b) Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors la partie $A + B$ de E est fermée.
Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{Z}$, peut-on remplacer « A est compacte » par « A est fermée » ?

12) Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F .

- a) On suppose que F est compact.
Montrer que : f est continue si et seulement si son graphe Γ est fermé dans $E \times F$.
Indication pour (\Leftarrow) : on suppose que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ dans E mais $f(x_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ dans F et construit une suite convergente $(f(x_{n_k}))_{k \geq 0}$ dont les termes sont hors d'une boule $B(f(x), \varepsilon)$.
- b) On suppose que E est compact.
Déduire du (a) que : f est continue si et seulement si son graphe Γ est compact.

Espaces métriques complets

- 13) On admet que pour toute application injective $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la formule $\delta(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ détermine une distance δ sur \mathbb{R} (généralisation de l'exercice 6 b de la feuille I).
- a) L'espace métrique (\mathbb{R}, δ) est-il complet quand $\varphi(x) = e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$?
- b) Démontrer que (\mathbb{R}, δ) est complet si et seulement si $\varphi(\mathbb{R})$ est un fermé de \mathbb{R} (distance usuelle).

14) On note $\mathbb{C}[[X]]$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni du « produit » $((a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}) \mapsto (\sum_{p+q=n} a_p b_q)_{n \geq 0}$.
On dispose sur $\mathbb{C}[[X]]$ de la distance $d: (a, b) \mapsto 2^{-v(a-b)}$ déterminée par :
 $v((a_n)_{n \geq 0}) = \min\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\}$ quand $(a_n)_{n \geq 0} \neq 0$ et $v(0) = +\infty$ (exercice 11 de la feuille I).

- a) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ de $\mathbb{C}[[X]]$, égal à $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, est dense dans $\mathbb{C}[[X]]$.
Indication : vérifier qu'un $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ s'écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k X^k$ (on le notera donc $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$).
- b) Démontrer que $\mathbb{C}[[X]]$ est complet.

15) L'application $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Indication : on pourra considérer la suite $(\frac{1}{n+1})_{n \geq 0}$ et son image par f .

16) Déterminer celles des applications suivantes qui sont contractantes et celles qui ont un point fixe :

$$f_1:]0, 1[\rightarrow]0, 1[; \quad f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; \quad f_3: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} ; \quad f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} .$$

$$x \mapsto \frac{x}{2} \quad x \mapsto \frac{x}{2} + 1 \quad x \mapsto \frac{x+2}{x+1} \quad x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$

17) Soit $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application k -contractante.

- a) Démontrer que l'application $A := \text{id}_{\mathbb{R}^n} - N$ est bijective.
Indication : fixer $y \in \mathbb{R}^n$ et utiliser l'application $N_y: x \mapsto N(x) + y$.
- b) Démontrer que l'application A^{-1} est $\frac{1}{1-k}$ -lipschitzienne.

18) Soient D_1, \dots, D_k ($k \geq 2$) des droites affines non-parallèles de l'espace affine euclidien \mathbb{R}^n .

Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, on note $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur D_i . (*)

- a) Démontrer que l'application $p_1 \circ p_k \circ p_{k-1} \circ \dots \circ p_2$ est contractante.
- b) En déduire qu'il existe $M_1 \in D_1, \dots, M_k \in D_k$, tels que :
$$p_2(M_1) = M_2, \dots, p_k(M_{k-1}) = M_k, \text{ et } p_1(M_k) = M_1.$$

(*) Soient $M, N \in \mathbb{R}^n$. Le point $p_i(M)$ est l'unique $M' \in D_i$ tel que $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{D_i}$. D'où : $\overrightarrow{p_i(M)p_i(N)} = \underbrace{\overrightarrow{p_i(N)} - \overrightarrow{p_i(M)}}_{\text{projection de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \overrightarrow{D_i} \text{ parallèlement à } \overrightarrow{D_i}^\perp}$.

19) Soit $n_0 \geq 1$. On considère une norme $\| \cdot \|$ sur \mathbb{R}^{n_0} et la norme « subordonnée » $\| \cdot \|$ sur $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$:

$$\|A\| := \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^{n_0} \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad \text{pour } A \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R}).$$

Soient $A, N \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$ tels que $A = I - N$ et $\|N\| < 1$, et $B \in \mathbb{R}^{n_0}$.

On verra dans la feuille V que A est inversible. On note $X \in \mathbb{R}^{n_0}$ la solution de $AX = B$.

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$. On définit $(X^{(n)})_{n \geq 0}$ par : $X^{(0)} = X_0$ et $X^{(n+1)} = NX^{(n)} + B$ pour $n \geq 0$.

Démontrer que $X^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X$ avec $\|X^{(n)} - X\| \leq \frac{\|N\|^n}{1 - \|N\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$ pour tout $n \geq 0$.

Espaces de Banach

20) On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme infini sur $[0, 1]$: $\|P\|_{L^\infty([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\| \cdot \|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?

b) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\| \cdot \|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?

21) On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ pour $f \in E$.

a) Si $n \geq 2$, on détermine $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par : $f_n|_{[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]} = 0$, $f_n|_{[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]}$ affine, $f_n|_{[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]} = 1$.

Démontrer que $(f_n)_{n \geq 2}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|_1)$.

b) On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ converge dans $(E, \| \cdot \|_1)$ vers un élément f .

Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = 0$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - 1| dx = 0$.

c) En déduire que l'espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

22) a) Soient A un ensemble et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Démontrer que l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ des applications bornées de A dans \mathbb{K} , muni de $\| \cdot \|_\infty$, est un espace de Banach.

b) On note : $c_0 := \{(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0\} \subseteq l^\infty$.

Démontrer que c_0 , muni $\| \cdot \|_\infty$, est un espace de Banach.

c) Soit X un espace topologique. Démontrer que l'espace vectoriel $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{C})$ formé des applications continues bornées de X dans \mathbb{C} , muni de $\| \cdot \|_\infty$, est un espace de Banach.

d) Soit $r \in]0, 1[$. On considère $f : \mathcal{C}([-r, r], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([-r, r], \mathbb{R})$ où $\psi : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $\varphi \mapsto \psi \quad x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt + 1$

Déduire du théorème du point fixe que f admet un unique point fixe.

Déterminer ce point fixe par un calcul direct.

23) On note $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

a) Le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est-il un espace de Banach pour $\| \cdot \|_\infty$?

b) On pose : $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Démontrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\| \cdot \|$ est un espace de Banach.

Complété d'un espace métrique

24) Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un espace métrique (\tilde{E}, \tilde{d}) muni d'une application isométrique $\tilde{i} : E \rightarrow \tilde{E}$ est un *complété* de (E, d) si (\tilde{E}, \tilde{d}) est complet et $\tilde{i}(E)$ est dense dans \tilde{E} .

a) Décrire, par exemple, un complété de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\| \cdot \|_{L^\infty([0,1])}$.

b) Soit $x_0 \in E$. Pour tous $x, z \in E$, on pose $\varphi_x(z) := d(x, z) - d(x_0, z)$.

Démontrer que les φ_x vérifient : $\varphi_x \in (\mathbb{R}^E)_b$ et $\|\varphi_x - \varphi_y\|_\infty = d(x, y)$ pour $x, y \in E$.

En déduire un complété de (E, d) .

c) On suppose donnés deux complétés (\tilde{E}, \tilde{d}) et (\tilde{E}, \tilde{d}) de E .

Démontrer qu'il existe une bijection isométrique $j : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$ telle que $\tilde{i} = j \circ \tilde{i}$.

Séries absolument convergentes

25) Soient $n_0 \geq 1$ et $A, B \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{C})$.

On fixe une norme subordonnée $\| \cdot \|$ sur $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{C})$ (exercice 19).

a) Démontrer que la série $(\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!})_{n \geq 0}$ converge dans $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{C})$.

b) On pose : $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. Démontrer que : $\det(\exp A) = e^{\text{tr} A}$.

c) On suppose que $BA = AB$. Vérifier que : $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.

Indication : remarquer que $\sum_{k=0}^n \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{A^i B^j}{i! j!}$ pour tout $n \geq 0$.

d) En déduire que pour toute $A \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$ antisymétrique, on a : $\exp A \in SO(n_0, \mathbb{R})$.