



CALCUL DIFFÉRENTIEL ET SÉRIES DE FOURIER

TD #3 - CONTINUITÉ(S)

1. FONCTIONS CONTINUES

(*) **Exercice 1 (Fonctions discontinues).** Considérer les fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f n'est pas continue en 0.
- 2) Montrer que g est discontinue sur les axes $[0, \infty[\times \{0\} \cup \{0\} \times [0, \infty[$.
- 3) Montrer que h n'est pas continue en $(0, 0)$.

(*) **Exercice 2 (Prolongement par continuité).** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, paramétrée par $\alpha \in]0, +\infty[$:

$$f(x, y) = \frac{|x - y|}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

- 1) Montrer que f ne peut pas être prolongée par continuité en $(0, 0)$ lorsque $\alpha = 1$, et lorsque $\alpha = 1/2$. Montrer que c'est la même chose pour tout $\alpha \geq 1/2$.
- 2) Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$ lorsque $\alpha < 1/2$. En déduire que f peut être prolongée par continuité en $(0, 0)$. *Indication : on fera apparaître une norme de (x, y) au numérateur et dénominateur.*

Exercice 3. Étudier la limite en $(0, 0)$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ suivantes :

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad f_2(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad f_3(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2} \quad f_4(x, y) = \frac{x^3y}{x^4 + y^2}$$

Ces fonctions se prolongent-elles en des fonctions continues sur \mathbb{R}^2 ?

2. CONTINUITÉ ET TOPOLOGIE

(*) **Exercice 4 (Continuité et ouverts).** Considérons \mathbb{R}^n muni de sa norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts et/ou fermés et justifier votre réponse :

- 1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$
- 3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y^2 - x < 0\}$.
- 2) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

(*) **Exercice 5 (Continuité et ouverts II).** Même exercice que le précédent. Vous prendrez garde au domaine de définition des fonctions que vous introduisez. C'est peut être le moment de retourner voir votre cours.

- 1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y\sqrt{x} \leq 1\}$
- 3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y\sqrt{x} < 1 \text{ et } x > \frac{1}{2}\}$
- 2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y\sqrt{x} < 1\}$

(*) **Exercice 6 (Continuité et compacts).** On munit \mathbb{R}^n de sa topologie euclidienne. Déterminer si les parties suivantes sont compactes :

- 1) $A = [0, 1] \times \{2\}$
- 4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^4 \leq 2\}$
- 2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 \leq 3\}$
- 5) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{|x|, |y|\} = 2\}$.
- 3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 2\}$.

Exercice 7 (Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Justifier que $\det : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Justifier que $f : E \rightarrow E, X \mapsto X^\top X$ est continue. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (Continuité ou pas selon la norme). Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ sur lequel on considère les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$. On note $\phi : E \rightarrow E$ l'application définie par $\phi(f) = f^2$.

- 1) Montrer que ϕ est continue dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
- 2) Montrer que ϕ n'est pas continue dans $(E, \|\cdot\|_1)$. *Indication : Considérer la suite $f_n(t) = \sqrt{n}e^{-nt}$.*

3. NORME SUBORDONNÉE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE CONTINUE

Exercice 9 (Fonction lipschitzienne sur \mathbb{R}^2). Considérons $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x, y) = 2x - 3y$.

- 1) Considérant que \mathbb{R}^2 est muni de la norme $\|\cdot\|_2$, cette application est-elle Lipschitzienne? Si oui, calculer la constante de Lipschitz correspondante.
- 2) Reprendre cette question avec la norme $\|\cdot\|_1$, puis $\|\cdot\|_\infty$.

(*) **Exercice 10.** Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Calculer $\|u\|$, la norme d'application linéaire subordonnée aux normes de E et F , dans les cas suivants :

- 1) $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, et $u(x, y) = 2x - 3y$.
- 2) $E = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$, $F = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, et $u(x, y, z) = (2x + y, 3z - y)$.
- 3) $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $F = (M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, et $u(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- 4) $E = (M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $u(X) = \text{tr}(A^\top X)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée.
- 5) $E = (M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $F = (M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, et $u(X) = AX$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée.

Noter que sur ces deux derniers cas on considère la norme $\|A\|_\infty = \max_{ij} |a_{ij}|$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

(*) **Exercice 11.** On munit $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_p$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_p$ sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m . On notera a_{ij} les coefficients d'une matrice A .

- 1) Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$, où λ_{\max} renvoie la plus grande valeur propre.
- 2) Montrer que $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$.
- 3) Montrer que $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

(*) **Exercice 12 (Norme d'une matrice colonne).** On considère ici \mathbb{R}^n muni d'une norme quelconque $\|\cdot\|$. On considère $x \in \mathbb{R}^n$ que l'on voit comme une matrice colonne dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, qui contient ses coefficients. Montrer que $\|x\| = \|x\|$.

Exercice 13 (Norme d'une forme linéaire). On considère ici \mathbb{R}^n muni de la norme $\|\cdot\|_p$, où $p \in [1, +\infty]$. On munit l'espace des formes linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_p$ subordonnée à $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ et $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Soit u une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , c'est-à-dire que $u(x) = \langle a, x \rangle$ pour un certain $a \in \mathbb{R}^n$.

- 1) Lorsque $p = 2$, montrer que $\|u\|_2 = \|a\|_2$. *Vous aurez besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
- 2) En général, montrer que $\|u\|_p = \|a\|_q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Vous aurez besoin de l'inégalité de Hölder.*

(*) **Exercice 14 (Opérateurs bornés sur un e.v.n.).** Pour chacun des cas suivants, déterminer si l'application linéaire $u \in L(E, F)$ est bornée, et le cas échéant calculer sa norme subordonnée.

- 1) $E = \mathbb{R}[t]$ muni de $\|P\|_\infty := \|(a_0, \dots, a_d)\|_\infty$ si $P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k$; $F = \mathbb{R}$ et $u(P) = P(0)$.
- 2) $E = F = \mathbb{R}[t]$ muni de $\|P\|_\infty$; $u(P) = P'$.
- 3) Même question que la précédente si on remplace $\mathbb{R}[t]$ par $\mathbb{R}_d[t]$ pour $d \in \mathbb{N}_*$.
- 4) $E = F = M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$; et $u(X) = AX$ pour $A \in E$ fixée.

Exercice 15 (Application linéaire bornée). Montrer qu'une application linéaire $u \in L(E, F)$ est bornée si et seulement si $u(A)$ est bornée dans F pour toute partie bornée $A \subset E$.

Exercice 16 (Bidual). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On définit pour tout $x \in E$ la fonction $\text{eval}_x : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $\text{eval}_x(u) = u(x)$, où on a noté $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

- 1) Montrer que eval_x est linéaire et continue.
- 2) Montrer que $\text{eval} : E \rightarrow E^{**}$ est linéaire et continue. On note ici $\text{eval}(x) = \text{eval}_x$ et $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R})$.
- 3) Soit \hat{E} l'adhérence de $\text{eval}(E)$ dans E^{**} . Justifier que \hat{E} est complet.
- 4) Montrer que si la norme dérive d'un produit scalaire alors $\|\text{eval}_x\| = \|x\|$, et que eval est injective.