

III. CONTINUITÉ (BONUS)

Suites

- 1) Démontrer que la distance $d_u: (f, g) \mapsto \min(\|f - g\|_\infty, 1)$ où $\|f - g\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est telle qu'une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} converge vers f au sens de d_u si et seulement si elle converge uniformément vers f .
- 2) a) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de points d'un espace métrique E . Démontrer que les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ sont les limites de ses suites extraites convergentes.
b) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est un intervalle.
- 3) Soit f une application d'une partie A d'un espace métrique E dans un espace métrique F .
a) Soient $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A qui converge dans E vers a , la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers l .
b) On suppose f définie sur E . Montrer que f est continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ convergente d'éléments de E , la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge dans F .
- 4) Soient f et g deux applications d'un espace métrique E dans un espace métrique F .
On suppose que f et g sont continues et coïncident sur une partie dense D de E .
Montrer qu'elles sont égales.
- 5) Pour tous $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $r_1, \dots, r_m \in]0, +\infty[$, on note :
 $B_{x_1, \dots, x_m}(f, (r_1, \dots, r_m)) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |g(x_1) - f(x_1)| < r_1 \text{ et } \dots \text{ et } |g(x_m) - f(x_m)| < r_m\}$.
On admet que l'ensemble des réunions de familles de parties de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui sont de la forme $B_{x_1, \dots, x_m}(f, (r_1, \dots, r_m))$ est une topologie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (« topologie produit »).
a) Montrer qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f pour cette topologie si et seulement si elle converge simplement vers f .
b) On note A l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} nulles en dehors d'un ensemble fini.
Montrer que la fonction 1 est dans \overline{A} sans être limite d'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A .

Continuité

- 6) Montrer directement la continuité (pour les topologies usuelles) des applications suivantes :
 $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_4: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x \quad (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y) \mapsto xy \quad (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$
- 7) a) Montrer que $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$.
b) On considère l'application $f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$.

$$A \mapsto A^{-1}$$
Pour quels $M \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ l'application f a-t-elle une limite quand $A \rightarrow M$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$?
- 8) Soit (E, d) un espace métrique. On munit $E \times E$ de la distance produit δ_∞ .
a) Démontrer que $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue.
b) Soit $A \subseteq E$ non-vidé. Pour tout $x \in E$, on pose : $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.
Démontrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue de E dans \mathbb{R}^+ .
c) Vérifier que : $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}$.
d) Soit $x \in E$. A-t-on : $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$?

9) a) Démontrer que $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que la restriction de f à la demi-droite $D_\theta = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) ; r > 0\}$ admet pour limite 0 lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ avec $(x, y) \in D_\theta$.

c) L'application f a-t-elle un prolongement par continuité $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

10) On note $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^3 = y^2\}$, où \mathbb{C}^2 est identifié à \mathbb{R}^4 .

a) Démontrer que l'application $g: \mathcal{C} \setminus \{(1, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue.

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y+1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -\frac{3}{2} & \text{si } x=1 \text{ (auquel cas } y = -1) \end{cases}$$

Indication : remarquer que $g(x, y) = \frac{x^2 + x + 1}{y - 1}$ quand $y \neq 1$.

b) Existe-t-il une application continue $\tilde{g}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathcal{C} \setminus \{(1, 1)\}$ est g ?

11) L'application $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle continue ?

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq |y| \\ y^2 & \text{si } |x| > |y| \end{cases}$$

Homéomorphisme

12) a) On munit \mathbb{R}^n de sa distance euclidienne usuelle.

Montrer que l'application $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se restreint en un homéomorphisme $v: \mathbb{R}^n \rightarrow B(0, 1)$.

$$x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$$

b) Exhiber une distance sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui induit la topologie de \mathbb{R} et donne comme voisinages de $-\infty$ (resp. $+\infty$) les parties contenant $[-\infty, \alpha[$ (resp. $]\alpha, +\infty]$) pour un $\alpha \in \mathbb{R}$.

13) On considère le cercle unité $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

a) L'application $f: [0, 2\pi[\rightarrow S^1$ est-elle un homéomorphisme ?

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

b) Même question pour l'application $g:]0, 2\pi[\rightarrow S^1 \setminus \{(1, 0)\}$.

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

14) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S^n la sphère unité euclidienne de \mathbb{R}^{n+1} , $N = (0, \dots, 0, 1)$ et $S = (0, \dots, 0, -1)$ ses deux pôles. À chaque $A \in \mathbb{R}^{n+1}$ on associe l'inversion I_A de pôle A et rapport 2 définie par :

$$I_A: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{A\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{A\} \text{ où } M' \text{ est déterminé par l'égalité } \frac{\overrightarrow{AM'}}{\|AM'\|^2} = 2 \frac{\overrightarrow{AM}}{\|AM\|^2}.$$

$$M \mapsto M'$$

a) Démontrer que I_N se restreint en une bijection $p_N: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Donner une construction géométrique de l'image M' d'un point M de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{N\}$ par p_N .

Indication : vérifier que $I_A \circ I_A = \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{A\}}$ et utiliser la caractérisation de S^n reliée à $[N, S]$.

b) Démontrer que p_N est un homéomorphisme (appelé projection stéréographique de pôle N).

cf. la vidéo http://www.dimensions-math.org/Dim_CH1.htm

Continuité uniforme

15) L'application $f: x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} est-elle uniformément continue ?

16) a) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue.

Montrer qu'il existe $u \geq 0$ et $v \geq 0$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq u|x| + v$.

b) Soit $a > 0$. L'application $f_a: x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^a \in \mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?

Distances équivalentes

- 17) On considère sur \mathbb{R}^2 les distances « euclidienne » d_2 et « TGV » d_T .
- a) L'application $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ est-elle continue de (\mathbb{R}^2, d_T) dans (\mathbb{R}^2, d_2) ? de (\mathbb{R}^2, d_2) dans (\mathbb{R}^2, d_T) ?
- b) Soit $a \in \mathbb{R}^2$. Déduire du a) que l'application $x \mapsto d_2(a, x)$ est continue de (\mathbb{R}^2, d_T) dans \mathbb{R} .
- 18) Soit (E, d) un espace métrique. On pose : $\tilde{d}(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ pour $x, y \in E$.
- a) Montrer que les distances d et \tilde{d} sont topologiquement équivalentes.
- b) Sont-elles toujours Lipschitz-équivalentes ?

Application linéaire continue

- 19) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|$.
- Continuité, et lorsque c'est le cas norme, des applications linéaires suivantes ?
- $$\begin{array}{l} \varphi_1: E \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{où } x_0 \in \mathbb{C} \text{ est fixé;} \quad \varphi_2: E \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \varphi_3: E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P(x_0) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad P \longmapsto \int_0^1 P(t) dt \quad \quad \quad P \longmapsto P' \end{array}$$
- 20) On considère l'espace vectoriel $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.
- Continuité, et lorsque c'est le cas norme, des applications linéaires suivantes ?
- $$\begin{array}{l} \psi_1: F \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \psi_2: F \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \psi_3: F \longrightarrow F \\ f \longmapsto f(0) \quad \quad \quad f \longmapsto \int_0^1 f(t) dt \quad \quad \quad f \longmapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt) \end{array}$$
- 21) On se place dans $G = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme.
- On note H le sous-espace vectoriel de G formé des applications dérivables de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .
- Les applications linéaires $A: g \in G \mapsto g(0)$ et $B: h \in H \mapsto h'(0)$ sont-elles continues ?
- 22) Soit φ une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- On suppose que φ prend des valeurs positives sur les fonctions positives.
- Montrer que φ est continue.
- 23) Montrer qu'une forme linéaire f sur un espace vectoriel normé réel E est continue si et seulement si son noyau est fermé.
- Indication* : quand $f \neq 0$ et $\text{Ker } f$ est fermé, fixer $e \in E$ tel que $f(e) = 1$ puis vérifier que tout $x \in \mathcal{C}_E \text{Ker } f$ a un multiple dans $e + \text{Ker } f$ donc hors d'une boule ouverte centrée en 0.
- 24) On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^{n_0} , $n_0 \geq 1$. On lui associe la norme $\|\|\cdot\|\|$ sur $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$ définie par :
- $$\|\|A\|\| := \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^{n_0} \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad \text{pour } A \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R}).$$
- Soit $N \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$ tel que $\|\|N\|\| < 1$.
- a) Prouver que : $I - N$ est inversible et $\sum_{k=0}^n N^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (I - N)^{-1}$ (étudier la différence).
- b) La série $(\sum N^n)_{n \geq 0}$ est-elle absolument convergente ?
- 25) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On appelle *norme de Frobenius* et note $\|\|\cdot\|\|_F$ la norme image de la norme $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^{n^2} par la bijection linéaire canonique de \mathbb{R}^{n^2} sur $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$:
- $$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}).$$
- a) Montrer que $\|\|\cdot\|\|_F$ vérifie : $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$ pour tous $A, B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$.
- b) Montrer que $\|\|\cdot\|\|_F$ n'est pas issue, comme dans l'exercice précédent, d'une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n .

Espaces de suites

26) Démontrer qu'il existe une forme linéaire non-continue sur l^2 .

Indication : on admet que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel a un supplémentaire.

27) On note : $c_0 := \{(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}$.

On munit ce sous-espace vectoriel de l^∞ de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Montrer qu'on définit une bijection linéaire qui conserve la norme $\Phi: l^1 \rightarrow (c_0)'$ en posant :

$$\Phi(y) = f_y \text{ pour tout } y = (y_n)_{n \geq 0} \in l^1, \text{ où } f_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \text{ quand } x = (x_n)_{n \geq 0} \in c_0.$$

Indication : associer à un $f \in (c_0)'$ la suite $y = (y_n)_{n \geq 0} := (f(\delta_n))_{n \geq 0}$ (*) et majorer la valeur de f au point $x^{(m)} := \sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ y_k \neq 0}} \frac{|y_k|}{y_k} \delta_k$ ($m \in \mathbb{N}$) en utilisant la continuité de f .

Application bilinéaire continue

28) On considère le produit terme à terme de deux suites bornées, lui-même borné :

$$\begin{aligned} \pi: \quad l^\infty \times l^\infty &\longrightarrow l^\infty \\ ((x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}) &\longmapsto (x_n y_n)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

Ce produit π est-il continu ?

(*) À chaque $n \in \mathbb{N}$, on associe : $\delta_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n^{\text{ème}} \text{ terme}}, 0, \dots)$.