



CALCUL DIFFÉRENTIEL ET SÉRIES DE FOURIER

TD #4 - DIFFÉRENTIELLE

I. APPLICATION DES DÉFINITIONS

(*) **Exercice 1 (Calcul pratique).** Pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ suivantes et pour $a \in \mathbb{R}^n$, calculer : leur matrice Jacobienne $\text{Jac}_a f$, leur différentielle $D_a f$, et leur dérivée directionnelle dans la direction $d = (1, 1, \dots)$. De plus, si cela a du sens, calculer leur gradient $\nabla f(a)$ et leur hessienne $\nabla^2 f(a)$. Enfin, si cela a été vu en cours, calculer la différentielle seconde $D_a^2 f$.

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x, y) = x^2 y + y^3$ | 5) $f(x, y) = (x^2 + \cos(y), y^2 x)$ |
| 2) $f(x, y) = (x^2 y + y^3, xy + x^2)$ | 6) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$ |
| 3) $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2 x)$ | 7) $f(x, y) = (\sin x, xy, \cos y)$ |
| 4) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2)$ | 8) $f(s, t, u, v) = (st + u^2, uv - s^2)$. |

(*) **Exercice 2 (Dérivées partielles et discontinuité).** Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1) Montrer que les dérivées partielles $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ existent en tout point de \mathbb{R}^2 .
- 2) Montrer que f est *discontinue* en $(0, 0)$.
- 3) Conclure que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

(*) **Exercice 3 (Dérivées partielles et non-différentiabilité).** Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1) Montrer que les dérivées partielles $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ existent en tout point de \mathbb{R}^2 .
- 2) Montrer que f est *continue* en $(0, 0)$.
- 3) Vérifier que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4 (Fonction \mathcal{C}^1). Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1) Montrer que les dérivées partielles $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ existent en tout point de \mathbb{R}^2 .
- 2) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 5 (Fonction directionnellement dérivable mais pas différentiable). Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, \\ 0 & \text{si } (x, y) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est directionnellement dérivable en $(0, 0)$.
- 2) Montrer que f n'est pas différentiable en $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$. Que dire sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$?

Exercice 6 (Fonction avec hessienne non symétrique). Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, \\ 0 & \text{si } (x, y) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

- 1) Prouver que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 (calculer les dérivées partielles d'ordre 1).
- 2) Montrer que f est deux fois partiellement dérivable en $(0, 0)$ et y calculer $\partial_{x,y}^2 f(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2})$ et $\partial_{y,x}^2 f(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2})$.
- 3) En déduire que f n'est pas C^2 en $(0, 0)$.

Exercice 7 (Différentielle de fonctions matricielles).

- 1) Calculer la différentielle de $u : X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mapsto X^\top \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- 2) Calculer la différentielle de $b : (X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \mapsto XY \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$.
- 3) Calculer la différentielle de $f : X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mapsto XX^\top \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (Différentielle de fonctionnelle). Soit $X = C([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et

$$\phi : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \phi(f) := \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

- 1) Montrer que $\phi(h) = o(\|h\|_\infty)$.
- 2) Pour $a \in X$ fixé, montrer que $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(h) := 2 \int_0^1 a(t)h(t)dt$ est linéaire et bornée.
- 3) Calculer la différentielle de ϕ en $a \in X$.

Exercice 9 (Différentielle de l'inverse matricielle). On considère $f(A) = A^{-1}$ définie sur $GL_n(\mathbb{R})$.

- 1) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|X\| < 1$. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k X^k$ converge.
- 2) Vérifier que $(I + X)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k X^k$.
- 3) En déduire que $(I + X)^{-1} = I - X + o(\|X\|)$.
- 4) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $u(H) := -A^{-1}HA^{-1}$. Vérifier que u est linéaire et continue.
- 5) Montrer que $f(A + H) = f(A) + u(H) + o(\|H\|)$, et conclure. On utilisera $(A + H) = A(I + A^{-1}H)$.

II. CALCUL

(*) **Exercice 10 (Composée linéaire).** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $g : (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

- 1) Soit $f(x) := g(Ax)$. Calculer $\nabla f(x)$ et l'exprimer en fonction de ∇g et A .
- 2) Calculer $\nabla^2 f(x)$ et l'exprimer en fonction de $\nabla^2 g$ et A .
- 3) Montrer que si ∇g est L -Lipschitzienne, alors ∇f est $(\|A\|_2^2 L)$ -Lipschitzienne dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.
- 4) Reprendre ces questions et expliciter les quantités en jeu lorsque $g(y) = \frac{1}{2}\|y - b\|_2^2$, pour $b \in \mathbb{R}^m$.

(*) **Exercice 11 (Moindre carré généralisé).** Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $f(x) := \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2$.

- 1) Exprimer $\nabla f(x)$ en fonction de F et de sa jacobienne.
- 2) Supposons que F soit affine : $F(x) = Ax - b$. Que vaut alors $\nabla f(x)$?
- 3) Supposons $m = n$ et $F = \nabla u$ où $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\nabla f(x) = \nabla^2 u(x) \cdot \nabla u(x)$.
- 4) Supposons $n = 1$. Montrer que $f'(t) = \langle F'(t), F(t) \rangle$.

(*) **Exercice 12 (Flot gradient).** Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , et soit $x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une trajectoire solution du *flot gradient* :

$$(FG) \quad (\forall t > 0) \quad x'(t) + \nabla f(x(t)) = 0.$$

Montrer que $t \mapsto f(x(t))$ décroît au cours du temps.

(*) **Exercice 13 (Formulaire).** On considère ici une fonction différentiable $u : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec A ouvert.

- 1) Donner une formule exprimant le gradient de $f(x) = e^{u(x)}$ en fonction du gradient de u .
- 2) Même question pour $f(x) = u(x)^p$, $p \in \mathbb{N}_*$.
- 3) Même question pour $f(x) = \sqrt{u(x)}$ en supposant que u ne s'annule pas sur A . Quelle formule obtenez-vous pour $u = \|\cdot\|_2^2$ et $A = \mathbb{R}_*^n$?

- 4) Même question pour $f(x) = 1/u(x)$ en supposant que u ne s'annule pas sur A . Quelle formule obtenez-vous pour $u = \|\cdot\|_2$ et $A = \mathbb{R}_*^n$?

III. ENCORE UN PEU D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 14 (Flot gradient : avancé). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et qui admet un minimiseur $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = \min f$. Soit $x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une trajectoire solution du flot gradient (FG).

- 1) On pose $r(t) = f(x(t)) - \min f$. Calculer $r'(t)$ et vérifier que $r'(t) \leq 0$.
- 2) On pose $h(t) = \frac{1}{2}\|x(t) - x^*\|^2$. Calculer $h'(t)$.
- 3) On suppose à partir de maintenant que f est convexe, ce qui veut dire que (admis)

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n) \quad \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

Montrer que $h'(t) \leq -r(t)$.

- 4) On pose $\mathcal{E}(t) = tr(t) + h(t)$. Montrer que $\mathcal{E}'(t) \leq 0$.
- 5) En déduire que $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)$ et puis que $f(x(t)) - \min f = O(1/t)$.

Exercice 15 (Équation de la chaleur). On définit sur $A = \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ la fonction

$$u : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, t) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}.$$

- 1) Calculer la dérivée d'une fonction $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de la forme $\psi(t) = \frac{C}{t^{\alpha/2}} e^{\frac{\alpha}{t}}$, $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 2) Rappeler ce que vaut le gradient de $q(x) = (1/2)\|x\|_2^2$.
- 3) Calculer la jacobienne d'une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme $\phi(x) = D e^{\beta q(x)}$, $D > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. En déduire que $\nabla \phi(x) = \beta \phi(x) \text{id}(x)$.
- 4) Montrer que $\nabla^2 \phi(x) = \beta \phi(x) (\beta x x^\top + I)$. On utilisera la formule de la jacobienne du produit.
- 5) On définit le Laplacien de u par $\Delta u(x, t) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t)$. Donner une simple formule exprimant le Laplacien en fonction de la hessienne de $x \mapsto u(x, t)$.
- 6) Déduire des questions précédentes que u est une solution de l'équation de la chaleur :

$$(\forall t > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2} \Delta u(x, t).$$

Exercice 16 (Équation différentielle linéaire). On rappelle que l'on peut définir $e^A = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $u(t) = e^{tA} u_0$, où $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

- 1) Calculer la dérivée de $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{(tA)^k}{k!} u_0$, pour $k \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrer que u est différentiable, en utilisant un résultat sur les séries de fonctions différentiables.
- 3) En déduire que u est une solution de l'équation différentielle linéaire $u'(t) = Au(t)$.

Exercice 17 (Boule pesante avec friction). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et qui admet un minimiseur $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = \min f$. Soit $x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une trajectoire solution de l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + \frac{3}{t} x'(t) + \nabla f(x(t)) = 0.$$

- 1) On pose $r(t) = f(x(t)) - \min f$ et $h(t) = \frac{1}{2}\|2(x(t) - x^*) + tx'(t)\|_2^2$. Montrer que

$$h'(t) = -t^2 r'(t) + 2t \langle \nabla f(x(t)), x^* - x(t) \rangle.$$

- 2) On suppose à partir de maintenant que f est convexe, ce qui veut dire que (admis)

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n) \quad \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

En déduire que $h'(t) \leq -t^2 r'(t) - 2tr(t)$.

- 3) On pose $\mathcal{E}(t) := t^2 r(t) + h(t)$. Montrer que $\mathcal{E}'(t) \leq 0$.
- 4) En déduire que $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)$ et puis que¹ $f(x(t)) - \min f = O(1/t^2)$.

¹Il est possible de montrer, en un certain sens, qu'il n'est pas possible de trouver d'équation différentielle telle que $f(x(t)) - \min f$ tende plus vite vers zéro que $1/t^2$.