Calcul différentiel et séries de Fourier

TD #5 - Applications du calcul différentiel

I. Approximation de fonction : TAF, Taylor

Exercice 1 (Accroissements finis vectoriel : contre-exemple). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

1) Montrer que f est différentiable, et calculer sa dérivée $f'(t)$.
2) Soit $a = 0$ et $b = 2\pi$. Montrer qu'il n'y a pas de $t \in [a, b]$ tel que
$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a).$$

Exercice 2 (Accroissements finis scalaire : contre-exemple). Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2y + 2\frac{e^x}{y}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine, et calculer son gradient $\nabla f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$.
2) Soient $a = (0,1)$ et $b = (1,2)$.Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(\xi), (b - a) \rangle.$$
3) Montrer que cela est impossible si on remplace b par $b' = (0, -1)$. Quel est le problème ici ?

($*$) **Exercice 3** (Lipschitzianité).

1) Comment déterminer la Lipschitzianité de $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ à l'aide de sa Jacobienne ?
2) Considérer chacune des fonctions f ci-dessous. Déterminer si $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et/ou $\nabla f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ sont Lipschitziennes. Si la réponse est oui, calculer la constante de Lipschitz correspondante.
   - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - \sin(x)$.
   - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-y)^2 + e^x$.
   - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|Ax - b\|^2$ où $b \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ non nulle.

Exercice 4 (Fonction Lipschitzienne dans $\mathbb{R}$). Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $f(x) := |x|^\alpha$.

1) Montrer que f est lipschitzienne sur $]c, +\infty[$ pour tout $c > 0$ et y calculer sa constante de Lipschitz.
2) Montrer que f n'est pas lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.
3) Que pouvez-vous dire lorsque $\alpha = 1$? $\alpha > 1$?

Exercice 5 (Fonctions affines). Montrer que $f : U \subset X \to Y$ est affine sur U si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est constante sur U.

($*$) **Exercice 6** (Développement de Taylor). Dans les cas suivants, justifier que les fonctions suivantes $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition et écrire la formule de Taylor à l'ordre r avec reste de Young au voisinage du point $a \in \mathbb{R}^n$:

1) $f(x,y) = (x-1)y + y^2$, $\quad a = (1,0),\ r = 1000.$
2) $f(x,y) = \cos x + \sin y + xy$, $\quad a = (0,\pi),\ r = 2.$
3) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $\quad a = (0,0),\ r = 3.$

II. Recherche d'extrema

Exercice 7 (Matrices 2×2). Déterminer la nature des matrices suivantes (définie positive, semi-définie positive ou non définie). *Interdiction de calculer les valeurs propres !*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(∗) **Exercice 8** (Classification d'extrema). Trouver les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes.

1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^3 - y$
2) $f(x,y) = \sin x + \cos y$
3) $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos z$
4) $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, où $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac \neq 0$.
5) $f(x,y) = x^2y^2(1+x+2y)$.

(∗) **Exercice 9** (Points critiques et extrema). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 \sin(y^2) + x^4.$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
2) Calculer le gradient de f. Décrire et dessiner sur le plan cartésien l'ensemble des points critiques

$$C_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \nabla f(x,y) = 0\}.$$

3) Calculer la hessienne de f, puis les valeurs $\operatorname{Hess} f(a)$ pour tout $a \in C_f$.
4) Trouver les extrema locaux de f.

Exercice 10. Montrer que $(0,0)$ est maximiseur local de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2\cos x \cos y + xy$.

III. Théorèmes des Fonctions Implicites et d'Inversion Locale

Exercice 11 (Inversion locale I). Soit $U = \{(x,y) \ : \ 0 < y < x\}$. On pose

$$f(x,y) = (x+y, xy).$$

1) Montrer que f est une bijection entre U et $V := \{(s,t) \ : \ s > 2\sqrt{t}, t > 0\}$.
2) Trouver une formule pour exprimer $f^{-1}(s,t)$ en fonction de $(s,t) \in V$, puis calculer $\operatorname{Jac}_{(s,t)} f^{-1}$.
3) Utiliser le théorème d'inversion locale pour calculer différemment $\operatorname{Jac}_{f(x,y)} f^{-1}$ lorsque $(x,y) \in U$.

(∗) **Exercice 12** (Inversion locale II). Par chacune des fonctions suivantes et les points $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ donnés, montrer que f^{-1} existe et est localement differentiable au voisinage de (a,b), puis calculer $\operatorname{Jac}_{(a,b)} f^{-1}$:

1) $f(u,v) = (3u - v, 2u + 5v)$ et tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2) $f(u,v) = (u + v, \sin u + \cos v)$ et $(a,b) = (0,1)$.
3) $f(u,v) = (uv, u^2 + v^2)$ et $(a,b) = (2,5)$.
4) $f(u,v) = (u^3 - v^2, \sin u - \log v)$ et $(a,b) = (-1,0)$.

Exercice 13 (Inversion locale : des nombres aux matrices). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par $F(x) = x^2$ et $F(X) = X^2$. On notera $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

1) Vérifier que f est un difféomorphisme local au voisinage de 1, et expliciter f^{-1}.
2) Vérifier que f est un difféomorphisme local au voisinage de -1, et expliciter f^{-1}.
3) Calculer $D_I F$ et montrer que F est un difféomorphisme local au voisinage de I.
4) Calculer $D_J F$ et en déduire que F n'est pas un difféomorphisme local au voisinage de J.

(∗) **Exercice 14** (Fonctions implicites I). Soit $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x,y,z) = xyz + \sin(x+y+z)$.

1) Vérifier que $(0,0,0)$ est solution de l'équation $F(x,y,z) = 0$.
2) Montrer que $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)$ est inversible.
3) Montrer que pour tout (x,y) au voisinage de $(0,0)$, il existe $\hat{z} \in \mathbb{R}$ tel que $F(x,y,\hat{z}) = 0$.
4) Justifier que l'application $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \hat{z}(x,y) \in \mathbb{R}$ est différentiable au voisinage de $(0,0)$.
5) Calculer $\operatorname{Jac}_{(0,0)} \hat{z}$.

Exercice 15 (Fonctions implicites II). Par chacune des équations suivantes, montrer que pour tout (x,y) au voisinage de $(0,0)$ il existe un $z \in \mathbb{R}$ tel que (x,y,z) en soit une solution.

1) $x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{\sin(x^2+y^2) + 3z + 4} = 2$.
2) $xyz(2\cos y - \cos z) + (z\cos x - x\cos y) = 0$.
3) $x + y + z + g(x,y,z) = 0$, où $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ est telle que $g(0,0,0) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial z}(0,0,0) > 0$.