



## CALCUL DIFFÉRENTIEL ET SÉRIES DE FOURIER

### TD #6 - ESPACES DE HILBERT

**Exercice 1 (Suite CVS qui diverge).** On pose  $\varphi(x) = e^{-|x|}$  et  $f_n(x) = \sqrt{n}\varphi(nx)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ .

- 1) Calculer  $\|f_n\|_2$ .
- 2) Déterminer la limite simple  $f$  de la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$ .
- 3) En déduire que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  diverge dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 2 (Primitive est Hölder-continue).** On considère  $f \in L^2([0, 1])$ .

- 1) Soit  $a \in [0, 1]$ . Montrer que la fonction  $f \cdot \mathbb{1}_{[0, a]}$  est intégrable sur  $[0, 1]$ .
- 2) On note  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  pour  $x \in [0, 1]$ . Montrer que  $|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_2 |x - y|^{1/2}$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 3 (Convergence forte vs. convergence faible).** Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ . On considère pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la suite  $x^k \in \ell^2(\mathbb{N})$  définie par  $x^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- 1) On suppose que la suite  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\ell^2(\mathbb{N})$  et converge *simplement* vers  $x$ , au sens où  $x_n^k \rightarrow x_n$  pour tout  $n$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $\langle x^k, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$  pour tout  $y \in \ell^2(\mathbb{N})$ .
- 2) Montrer que  $x^k \rightarrow x$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $x^k \rightarrow x$  simplement et  $\|x^k\|_2 \rightarrow \|x\|_2$ .

**Exercice 4 (Produit scalaire à noyau).** On considère une application continue  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , et on définit

$$\psi : C([a, b], \mathbb{C}) \times C([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(f, g) = \int_a^b \int_a^b f(s) \overline{g(t)} K(s, t) ds dt.$$

- 1) Vérifier que  $\psi$  est sesquilinéaire (linéaire à gauche et semilinéaire à droite).
- 2) Montrer que si  $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$  alors  $\psi$  est hermitienne.
- 3) On suppose à partir de maintenant que  $K(s, t) = \frac{1}{1-st}$  avec  $a = 0$  et  $b \in ]0, 1[$ . Montrer que  $\psi$  est une forme sesquilinéaire hermitienne qui vérifie de plus

$$\forall f \in C([0, b], \mathbb{C}), \quad \psi(f, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^b f(t) t^n dt \right|^2.$$

On utilisera le fait que  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  lorsque  $|x| < 1$ , et des résultats de théorie de l'intégration.

- 4) Montrer que  $\psi$  est un produit scalaire, à l'aide du théorème de densité de Weierstrass<sup>1</sup>.

**Exercice 5 (Orthogonaux simples).** Soit  $E$  un préhilbertien,  $a \in E$  et  $u(x) = \langle a, x \rangle$  la forme linéaire associée. Montrer que  $\text{Vect}(a)^\perp = \text{Ker}(u)$  et  $\text{Ker}(u)^\perp = \text{Vect}(a)$ .

**Exercice 6 (Projection et translation).** Soient  $C \subset E$  un ensemble convexe complet non vide,  $a \in E$ , et  $D := C + a$ . Montrer que

$$(\forall x \in E) \quad \text{proj}_D(x) = a + \text{proj}_C(x - a).$$

On fera également un dessin illustrant cette propriété.

**Exercice 7 (Projection affine simple).** Soit  $E$  un préhilbertien,  $a \in E$  non nul et  $b \in \mathbb{R}$ . On définit l'hyperplan  $C_{a,b} = \{x \in E \mid \langle a, x \rangle = b\}$ .

- 1) Montrer que la projection de  $x \in E$  sur  $\text{Vect}(a)$  vaut  $\frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a$ . Vous utiliserez la définition de projection et le fait que tout élément de  $\text{Vect}(a)$  s'écrit  $\lambda a$ .
- 2) Montrer que  $\text{proj}_{C_{a,b}}(x) = x - \frac{\langle a, x \rangle - b}{\|a\|^2} a$  lorsque  $b = 0$ .
- 3) Montrer que  $C_{a,b} = C_{a,0} + v$  où  $v \in C_{a,b}$ . En déduire que la formule précédente reste vraie pour  $b \neq 0$ , avec l'aide de l'exercice précédent.

<sup>1</sup>Les polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  restreint à l'intervalle  $[a, b]$  sont denses dans  $(C([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Exercice 8 (Espace de suites finies).** On note  $c_{00}(\mathbb{N})$  le sous-espace vectoriel de  $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$  constitué de suites finies :

$$c_{00}(\mathbb{Z}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \{k \in \mathbb{Z} \mid x_k \neq 0\} \text{ est fini}\}.$$

On définit une forme linéaire  $u : c_{00}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$  par  $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1}$ .

- 1) Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que  $u$  est bien définie et continue.
- 2) Existe-t-il un représentant  $a \in c_{00}(\mathbb{N})$  tel que pour tout  $x \in c_{00}(\mathbb{N})$ , on ait  $u(x) = \langle a, x \rangle$  ?
- 3) Que peut-on en déduire sur l'espace  $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$  ?

**Exercice 9 (Pas de base algébrique orthonormale en dimension infinie).** Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension infinie. Montrer qu'il n'existe pas de famille orthonormale  $(e_i)_{i \in I}$  qui vérifie  $\text{Vect}(e_i)_{i \in I} = H$ . On admettra qu'un ensemble infini contient un sous-ensemble en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

**Exercice 10 (Espace de suites régulières).** On note

$$h^1(\mathbb{Z}) = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid (na_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

- 1) Montrer que  $h^1(\mathbb{Z}) \subseteq \ell^1(\mathbb{Z})$ .
- 2) Montrer que

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + 4\pi^2 n^2) a_n \overline{b_n}$$

définit un produit scalaire sur  $h^1(\mathbb{Z})$ .

- 3) Montrer que, muni de ce produit scalaire,  $h^1(\mathbb{Z})$  est un espace de Hilbert.

**Exercice 11 (Espace de fonctions régulières).** Pour  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on définit :

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

- 1) Montrer que  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .
- 2) Soient  $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  définies par  $f_0(t) = 1, f_1(t) = t, f_2(t) = t^2$  pour  $t \in [0, 1]$ . Déterminer la projection orthogonale de  $f_2$  sur le sous-espace vectoriel engendré par  $f_0$  et  $f_1$ .
- 3) Quelle famille orthonormée se déduit de  $(f_0, f_1, f_2)$  par le procédé de Gram-Schmidt ?

**Exercice 12 (Polynômes de Hermite).** On considère la mesure  $\mu = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On pose  $p_n(x) = x^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $(h_n)_{n \geq 0}$  la famille déduite de  $(p_n)_{n \geq 0}$  par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ . Montrer que  $h_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

**Exercice 13 (Espace de Sobolev).** On note  $H^1$  l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  pour lesquelles il existe une application borélienne 1-périodique  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de carré intégrable sur  $[0, 1]$  telle que :

$$\int_0^1 g(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt.$$

- 1) Montrer que  $g$  est déterminée modulo l'égalité presque partout, et que  $f$  définit une fonction continue sur  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .
- 2) On introduit la norme  $\|f\|_{H^1} = \left( \|f\|_{L^2([0,1])}^2 + \|g\|_{L^2([0,1])}^2 \right)^{1/2}$  pour  $f \in H^1$ . Montrer que  $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$  est un espace de Hilbert.
- 3) On note  $H_0^1 = \{f \in H^1 \mid f(0) = 0\}$ . Montrer que pour tout  $f \in H_0^1$ , on a  $\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{H^1}$ . En déduire que  $H_0^1$  est fermé dans  $H^1$ .