



CALCUL DIFFÉRENTIEL ET SÉRIES DE FOURIER

TD #7 - SÉRIES DE FOURIER

1. CALCUL DES COEFFICIENTS DE FOURIER

Coefficients de Fourier (complexes ou réels) d'une fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

On dispose des formules de Parseval (si $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$) et de Fourier (si $f \in DC^1(\mathbb{T}, \mathbb{C})$) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 + |b_n|^2,$$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Exercice 1. Soit f une fonction 2π -périodique qui vaut -1 sur $]-\pi; 0[$ et 1 sur $]0; \pi[$.

- 1) Calculer ses coefficients de Fourier réels. *Vous utiliserez astucieusement la parité de la fonction.*
- 2) Appliquer la formule de Parseval, et en déduire que $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
- 3) Que vaut la série de Fourier en $x = 0$?
- 4) Appliquer la formule de Fourier en $x = \pi/2$, et en déduire que $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2. Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(t) = \pi - |t|$ pour $t \in [-\pi; \pi]$.

- 1) Tracer le graphe de f à main levée.
- 2) Calculer ses coefficients de Fourier.
- 3) Calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 3. Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(t) = t(\pi - |t|)$ pour $t \in [-\pi; \pi]$.

- 1) Calculer ses coefficients de Fourier.
- 2) Calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 4 (Fonction affine par morceaux). Soit g la fonction 1 -périodique définie sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2} - x.$$

- 1) Calculer les coefficients de Fourier de g .
- 2) En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. EXPLOITER LES SÉRIES DE FOURIER

Exercice 5. Soit p un nombre réel. Soit f une fonction 2π -périodique telle que $f(x) = \cos(px)$ pour $x \in]-\pi; \pi[$.

- 1) Calculer ses coefficients de Fourier.
- 2) Démontrer la formule, pour $p \notin \mathbb{Z}$,

$$\pi \cot(\pi p) = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p}{p^2 - n^2}.$$

- 3) Démontrer la formule

$$\sin(\pi p) = \pi p \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right).$$

Exercice 6 (Identité de Parseval). Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose :

$$f(x) = e^{2\pi\alpha x} \quad \text{pour } 0 \leq x < 1.$$

- 1) Montrer, en appliquant l'identité de Bessel-Parseval, que :

$$\frac{1}{e^{2\pi\alpha} - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi\alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}.$$

- 2) Retrouver ainsi la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 7 (Inégalité de Poincaré). Soit $f : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$.

- 1) Démontrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|^2 dx.$$

Indication : Calculer les coefficients de Fourier de g et g' , où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est le prolongement impair et 1-périodique de f .

- 2) Pour quelles fonctions f comme ci-dessus a-t-on :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|^2 dx?$$

Exercice 8 (Fonction polynômiale par morceaux). Soit f la fonction 1-périodique définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par :

$$f(x) = x^2.$$

- 1) Calculer les coefficients de Fourier réels de f .
- 2) Montrer que f est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.
- 3) En déduire la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

3. APPLICATIONS DU THÉORÈME DE DIRICHLET

Exercice 9 (Calcul de série I). Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n} = \pi \left(\frac{1}{2} - x\right).$$

Exercice 10 (Calcul de série II). Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n} = -\ln(2 \sin(\pi x)).$$

Exercice 11 (Phénomène de Gibbs). Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\frac{1}{2}, 0], \\ 1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

- 1) Déterminer la série de Fourier $(S_n(f))_{n \geq 1}$ de f et calculer sa somme en tout point.
- 2) Montrer qu'il existe un point $(0, b)$ de l'axe des ordonnées avec $b \notin [f(0^-), f(0^+)]$ qui est adhérent à la réunion des graphes des $S_n, n \geq 1$ (phénomène de Gibbs). *Indication* : Étudier $(S_{2n-1}(f) (\frac{1}{4n}))_{n \geq 1}$ en utilisant :

$$\int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \geq \int_0^3 \sum_{k=0}^3 (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k+1)!} du \geq 1.84.$$

4. ESPACES DE FONCTIONS ASSOCIÉS AUX SÉRIES DE FOURIER

Exercice 12 (Espace de fonctions aux fréquences rapidement décroissantes). On pose :

$$A(\mathbb{T}) = \left\{ t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n t} \mid (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}) \right\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

- 1) Quelle est la transformée de Fourier d'un élément $f : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n t}$ de $A(\mathbb{T})$?
- 2) Montrer que l'application $A(\mathbb{T}) \rightarrow l^1(\mathbb{Z})$ est bijective.

Exercice 13 (Dualité décroissance / dualité). Soit $p \geq 1$. On note $W^{1,p}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions de la forme $a + \int_0^\cdot g(t) dt$, où $a \in \mathbb{C}$ et $g \in L^p(\mathbb{T})$ avec $c_0(g) = 0$.

- 1) Montrer que $W^{1,2}(\mathbb{T}) \subseteq W^{1,1}(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T})$.
- 2) Soit $f = a + \int_0^\cdot g(t) dt \in W^{1,1}(\mathbb{T})$. Exprimer $\hat{g}(n)$ en fonction de $\hat{f}(n)$ pour $n \neq 0$.
- 3) Montrer que :

$$W^{1,1}(\mathbb{T}) \subseteq \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } |n| \rightarrow +\infty \right\}.$$

- 4) Montrer que :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{T}), \quad f \in W^{1,2}(\mathbb{T}) \iff (n\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}).$$

- 5) Montrer que :

$$W^{1,2}(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

Vérifier qu'il n'y a aucune inclusion entre $A(\mathbb{T})$ et $W^{1,1}(\mathbb{T})$.

Exercice 14. On considère la fonction paire 1-périodique définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par :

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin((2^{p^3} + 1)\pi x).$$

- 1) Montrer que f est bien définie et continue.
- 2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$a_n(f) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} a_{n, 2^{p^3-1}},$$

où on a posé, pour un entier m :

$$a_{n,m} = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi n t) \sin((2m+1)\pi t) dt.$$

- 3) Montrer que :

$$a_{n,m} = \frac{1}{\pi} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - (2n)^2}.$$

- 4) Montrer que pour tous m, n , la quantité $s_{n,m} = \sum_{k=0}^n a_{k,m}$ est positive.
- 5) Montrer que :

$$s_{m,m} \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^m \frac{m + \frac{1}{2}}{(m + \frac{1}{2})^2 - t^2} dt \geq \frac{1}{4\pi} \ln(m).$$

6) Montrer que :

$$S_n(f)(0) = \sum_{k=0}^n a_k(f) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} S_{n, 2^{p^3-1}}.$$

7) Montrer que $S_{2^{p^3-1}}(f)(0)$ tend vers l'infini lorsque p tend vers l'infini.

5. AUTRES

Exercice 15. Soit f, g des fonctions de période T , continues par morceaux. On pose

$$f * g(x) = \int_0^T f(t)g(x-t) dt.$$

- 1) Démontrer que $f * g$ est périodique de période T ; justifier qu'elle est continue.
- 2) Démontrer que les coefficients de Fourier de $f * g$ vérifient

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 16. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}.$$

- 1) Calculer la dérivée de S_n . En déduire les variations de S_n .
- 2) Démontrer que les maxima relatifs de S_n sont les $m_k = S_n\left(\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right)$, pour k entier tel que $0 \leq k \leq n/2$. Démontrer que $m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_{\lfloor n/2 \rfloor}$.
- 3) Démontrer que $\sup(S_n) \rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$.
- 4) Démontrer que pour tout $x \in]-\pi; \pi[$, on a $S_n(x) \rightarrow \frac{\pi-x}{2}$. Comparer $\sup(S)$ et $\lim_n \sup(S_n)$; interpréter? (Phénomène de Gibbs)