

# Complément culturel : la FFT (J-Y D)

## Référence

M. Schatzman, *Analyse numérique* (2<sup>e</sup> édition), chapitres 8.6 et 8.7. L'algorithme est visualisée page 197, avec un désentrelacement donné en bas de page.

## Problème

On se donne  $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ . Par définition de  $\widehat{F}$ , on a :  $\widehat{F}(p) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi pt} dt$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ .

Les sommes de Riemann  $u_n(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\frac{2i\pi pk}{n}}$  vérifient  $u_n(p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \widehat{F}(p)$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ . (\*)

On fixe maintenant  $n \geq 1$ . On a bien sûr :  $u_n(p+n) = u_n(p)$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ .

Afin d'obtenir une « valeur approchée » de  $\widehat{F}$ , on souhaite ici calculer les  $u_n(p)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

## Transformation de Fourier sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On note  $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\widehat{f}(\dot{p}) = \sum_{\dot{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(\dot{k}) e^{-\frac{2i\pi pk}{n}}$  pour  $\dot{p} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Ainsi :  $u_n(p) = \frac{1}{n} \widehat{f}(\dot{p})$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ . On cherche donc à calculer les  $\widehat{f}(\dot{p})$ ,  $\dot{p} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

On introduit  $v = \begin{pmatrix} f(\dot{0}) \\ \vdots \\ f(\dot{(n-1)}) \end{pmatrix}$  dans l'ordinateur, et désire obtenir  $w = \begin{pmatrix} \widehat{f}(\dot{0}) \\ \vdots \\ \widehat{f}(\dot{(n-1)}) \end{pmatrix}$ .

L'algorithme de la transformation de Fourier rapide (FFT=« Fast Fourier Transform ») découvert en 1965 va permettre de calculer  $w$  à partir de  $v$  avec un nombre d'addition et de multiplications portant sur les nombres réels de la forme  $O(n \ln n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

On suppose pour simplifier que  $n$  s'écrit  $2^m$  avec  $m \in \mathbb{N}$ . On pose dans  $\mathbb{R}^{n/2}$  :

$$v_{\text{début}} = \begin{pmatrix} f(\dot{0}) \\ \vdots \\ f(\dot{(\frac{n}{2}-1)}) \end{pmatrix} \text{ et } v_{\text{fin}} = \begin{pmatrix} f(\dot{\frac{n}{2}}) \\ \vdots \\ f(\dot{(n-1)}) \end{pmatrix}, \quad w_{\text{pair}} = \begin{pmatrix} \widehat{f}(\dot{0}) \\ \widehat{f}(\dot{2}) \\ \vdots \\ \widehat{f}(\dot{(n-2)}) \end{pmatrix} \text{ et } w_{\text{impair}} = \begin{pmatrix} \widehat{f}(\dot{1}) \\ \widehat{f}(\dot{3}) \\ \vdots \\ \widehat{f}(\dot{(n-1)}) \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{F}_n$  la matrice indépendante de  $f$  déterminée par l'égalité  $w = \mathcal{F}_n v$ .

La construction de  $w$  à partir de  $v$  s'obtient à l'aide des relations de récurrence suivantes :

$$\begin{pmatrix} w_{\text{pair}} \\ w_{\text{impair}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} I_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & D_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{\textcircled{à calculer avant d'appliquer } \mathcal{F}_{\frac{n}{2}} \text{ à chacun des deux vecteurs, en se ramenant à } \mathcal{F}_{\frac{n}{4}}} \\ \text{\textcircled{à calculer avant d'appliquer } \mathcal{F}_{\frac{n}{2}} \text{ à chacun des deux vecteurs, en se ramenant à } \mathcal{F}_{\frac{n}{4}}}}} \begin{pmatrix} v_{\text{début}} + v_{\text{fin}} \\ v_{\text{début}} - v_{\text{fin}} \end{pmatrix} \text{ où } D_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ e^{-\frac{i\pi}{n}} & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & e^{-\frac{(n-1)i\pi}{n}} \end{pmatrix}.$$

## Intérêt

Pour calculer  $\widehat{f}$  à l'aide de sa définition, on ferait  $4n^2 - 2n$  additions de nombres réels et  $4n^2$  multiplications de nombres réels. Quand  $n = 10^3 \leq 2^{10}$  ce calcul direct demanderait environ  $8 \cdot 10^6$  opérations sur des nombres réels, tandis que la FFT ci-dessous en demandera environ  $5 \cdot 10^4$ .

(\*) D'après le théorème 8.5.1 de la page 184 du livre de Schatzman, lorsque  $G \in \mathcal{C}^m(\mathbb{T})$  on a même :

$$\left| \int_0^1 G(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\|G^{(m)}\|_1}{(2\pi n)^m} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{k^m} \text{ pour tout } n \geq 1.$$