Théorèmes de Fubini : à retenir (J-Y D)

On fixe des espaces mesurés $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ tels que μ et ν sont σ-finies.

Proposition

Il existe une unique mesure $\mu\otimes\nu$ sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, appelée *mesure produit de μ et ν*, vérifiant

$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\underbrace{\mu(A)\,\nu(B)}_{0\text{ quand l'un vaut }0\text{ et l'autre vaut }+\infty}\qquad\text{pour tous}\quad A\in\mathcal{A}\quad\text{et}\quad B\in\mathcal{B}.\ ^{(\star)}$$

Théorème (« théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue »)

(a) Pour toute application mesurable positive $f\colon\overbrace{X\times Y}^{\text{muni de }\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}\to\overbrace{\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}}^{\text{muni de }\mathscr{B}(\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\})}$, on a :

les applications $\begin{array}{rcl} X&\to&\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}\\ x&\mapsto&\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\end{array}$ et $\begin{array}{rcl} Y&\to&\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}\\ y&\mapsto&\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{array}$ sont mesurables,

et $\boxed{\int_{X\times Y}f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y)\;=\;\int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\mathrm{d}\mu(x)\;=\;\int_Y\Big(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\mathrm{d}\nu(y)\;\leq+\infty}$.

(b) Pour toute application $\mu\otimes\nu$-intégrable $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$, on a :

la fonction $\begin{array}{rcl} X&\to&\mathbb{C}\\ x&\mapsto&\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\end{array}$ est définie μ-presque partout et $\underbrace{\mu\text{-intégrable}}_{\text{on fixe ses valeurs égales à 0 sur un certain ensemble mesurable }\mu\text{-négligeable}}$,

la fonction $\begin{array}{rcl} Y&\to&\mathbb{C}\\ y&\mapsto&\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{array}$ est définie ν-presque partout et $\underbrace{\nu\text{-intégrable}}_{\text{on fixe ses valeurs égales à 0 sur un certain ensemble mesurable }\nu\text{-négligeable}}$,

et $\boxed{\int_{X\times Y}f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y)\;=\;\int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\mathrm{d}\mu(x)\;=\;\int_Y\Big(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\mathrm{d}\nu(y)}$.

(c) En particulier, pour tous $g\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $h\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, on a :

$$\int_{X\times Y}g(x)\,h(y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y)\;=\;\int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\;\int_Y h(y)\,\mathrm{d}\nu(y).\ ^{(\star\star)}$$

Utilisation des théorèmes de Fubini

On munit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et $\mathbb{R}^2$ de leur tribu borélienne et utilise sur $\mathbb{R}$ $\overbrace{\text{la mesure de Lebesgue}}^{\text{on notera }\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\,\mathrm{d}x\text{ l'intégrale de }h}$.

(a) On considère une application $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ mesurable.

On a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\Big)}_{\text{mesurable en }x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\Big)}_{\text{mesurable en }y}\mathrm{d}y\quad\leq\;+\infty$

et, quand le résultat commun est fini : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)}_{\text{intégrable en }x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)}_{\text{intégrable en }y}\mathrm{d}y.$

(b) On considère une suite d'applications $u_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mesurables avec $n\geq 0$.

On a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n(x)|\Big)}_{\text{mesurable en }x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|u_n(x)|\,\mathrm{d}x\Big)\quad\leq\;+\infty$

et, quand le résultat commun est fini : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\Big)}_{\text{intégrable en }x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x\Big).$

(c) On considère une suite double $(u_{p,q})_{p,q\geq 0}$ de nombres complexes.

On a : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\Big)=\sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\Big)\quad\leq\;+\infty$

et, quand le résultat commun est fini : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\Big)=\sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\Big).$

---

utiliser $E=\mathrm{pr}_1^{-1}(E\times\{0\})$

$(\star)$ On note $\widetilde{\lambda}$ la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\widetilde{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$. On fixe — existe — $E\subseteq\mathbb{R}$ tel que $E\notin\widetilde{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$.
On a : $(\widetilde{\lambda}\otimes\widetilde{\lambda})(\mathbb{R}\times\{0\})=0$. La partie $E\times\{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est donc $\widetilde{\lambda}\otimes\widetilde{\lambda}$-négligeable, sans être un élément de $\widetilde{\mathscr{B}(\mathbb{R})}\otimes\widetilde{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$.

$(\star\star)$ À partir des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $E=\mathbb{C}^X$ et $F=\mathbb{C}^Y$, une construction algébrique classique permet de construire un certain espace vectoriel quotient de $\mathbb{C}^{(E\times F)}$ noté $E\otimes_{\mathbb{C}}F$ (appelé « produit tensoriel de E et F »), muni de la projection canonique de $E\times F$ dans $E\otimes_{\mathbb{C}}F$ notée $(g,h)\mapsto g\otimes h$. On peut montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{C}^X\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^Y$ dans $\mathbb{C}^{X\times Y}$ qui envoie chaque $g\otimes h$ sur $(x,y)\mapsto g(x)\,h(y)$, et que cette application est injective.

Par abus de notation, on note : $\boxed{(g\otimes h)(x,y)=g(x)\,h(y)\ \text{ pour }\ g\colon X\to\mathbb{C},\ \ h\colon Y\to\mathbb{C},\ \ x\in X\ \text{ et }\ y\in Y}$.

Théorème de changement de variable : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition-Proposition

On considère un espace mesurable $(Y, \mathcal{B})$ et une application mesurable $f\colon X \to Y$.

(a) La *mesure image de μ par f* est la mesure $f(\mu)$ sur Y déterminée par :

$$f(\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B)) \text{ pour tout } B \in \mathcal{B}.$$ $\leftarrow$ [si $\mu(X) = 1$ et $\mathbb{P} := \mu$, on note : $\mathbb{P}_f := f(\mu)$]

(b) Pour toute application mesurable $h\colon Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_Y h \,\mathrm{d}f(\mu) = \int_X h \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

On en déduit que pour toute application mesurable $h\colon Y \to \mathbb{C}$, on a :

$$h \in \mathscr{L}^1(f(\mu)) \iff h \circ f \in \mathscr{L}^1(\mu)\,; \quad \text{dans ce cas : } \int_Y h \,\mathrm{d}f(\mu) = \int_X h \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Théorème (« théorème de changement de variable »)

$\leftarrow$ [on traduit ici l'égalité $\lambda^{\otimes n}|_{\varphi(U)} = \varphi(|J_\varphi|\,\lambda^{\otimes n}|_U)$]

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ et de la mesure $\lambda^{\otimes n}$, où λ est la mesure de Lebesgue.
On considère un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et une application $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

On note : $J_\varphi(x) := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \le i,j \le n}$ pour $x \in U$ et $\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} := \det J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$.

On suppose que : φ est injective et vérifie $\det J_\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$.
D'après le théorème d'inversion locale, la partie $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(a) Pour toute $f\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable, l'application $(f \circ \varphi)\,|\det J_\varphi|$ est mesurable et

$$\boxed{\int \cdots \int_{\varphi(U)} f(y_1, \dots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \int \cdots \int_U f(\varphi(x_1, \dots, x_n))\,|\det J_\varphi(x_1, \dots, x_n)|\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \le +\infty}.$$

(b) Pour toute $f\colon \varphi(U) \to \mathbb{C}$ intégrable, l'application $(f \circ \varphi)\,|\det J_\varphi|$ est intégrable et

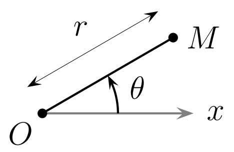
$$\boxed{\int \cdots \int_{\varphi(U)} f(y_1, \dots, y_n)\,\underbrace{\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n}_{\text{quand } n = 1 \text{ : poser } y_1 = \varphi(x_1) \text{ et penser à } |\mathrm{d}y_1| \text{ plutôt qu'à } \mathrm{d}y_1} = \int \cdots \int_U f(\varphi(x_1, \dots, x_n))\,|\det J_\varphi(x_1, \dots, x_n)|\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}.$$

Utilisation

Recette du théorème de changement de variable : « $\underbrace{\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n}_{\text{penser à } |\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n|} = \left|\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\right| \underbrace{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}_{\text{penser à } |\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n|}$ ».

(a) Passage en coordonnées polaires : $\varphi(U) = \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})}_{\text{de complémentaire négligeable}}$ où φ est définie par

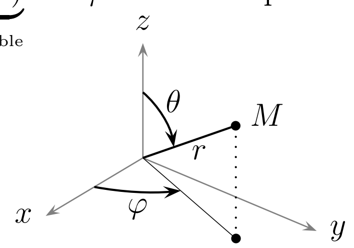
$$\underset{\varphi(r,\theta)}{\overset{\displaystyle M}{\parallel}} \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad r > 0 \text{ et } 0 < \theta < 2\pi$$



et la recette s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$.

(b) Passage en coordonnées sphériques : $\varphi(U) = \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \mathbb{R})}_{\text{de complémentaire négligeable}}$ où φ est définie par

$$\underset{\varphi(r,\theta,\varphi)}{\overset{\displaystyle M}{\parallel}} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{avec } r > 0,\ 0 < \underbrace{\theta}_{\text{colatitude}} < \pi \text{ et } 0 < \underbrace{\varphi}_{\text{longitude}} < 2\pi,$$



et la recette s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}$. $(\star\star\star)$

$(\star\star\star)$ On généralise (a) et (b) avec le changement de variable suivant qui donnera $\varphi(U) = \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^+ \times \{0\})}_{\text{de complémentaire négligeable}}$:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \dots\ \dots\ \dots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \overbrace{r > 0}^{r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}},\quad \overbrace{0 < \theta_1 < \pi}^{\theta_1 = \arccos\frac{x_1}{\sqrt{r^2}}} \text{ et } \cdots \text{ et } \overbrace{0 < \theta_{n-2} < \pi}^{\theta_{n-2} = \arccos\frac{x_{n-2}}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-3}^2}}},\ \text{et}\ \underbrace{0 < \theta_{n-1} < 2\pi}_{e^{i\theta_{n-1}} = \frac{x_{n-1} + i\,x_n}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-2}^2}}},$$

$$\varphi_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = (u, \varphi_{n-1}(v, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})) \text{ avec } u = r\cos\theta_1 \text{ et } v = r\sin\theta_1$$

et la recette devient $\boxed{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\,\sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_{n-1}}$ $(n \ge 2)$