Intégrale de Lebesgue : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. On munit $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ de leur tribu borélienne.

Définition-Proposition

(a) Soit $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$. On dit que φ *est étagée* si φ est mesurable d'image finie.

Donc φ est étagée si et seulement si elle s'écrit $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $A_1, ..., A_p \in \mathcal{A}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{C}$.

(b) On considère une fonction étagée positive $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^+$. On note :

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu \;:=\; \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \underbrace{\alpha\, \mu(\varphi^{-1}(\{\alpha\}))}_{0 \text{ quand } \alpha = 0 \text{ et } \mu(\varphi^{-1}(\{\alpha\})) = +\infty} \;\le\; +\infty.$$

(c) Toute fonction mesurable positive $f\colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives. $\leftarrow \Big[$Par exemple : $\varphi_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{\frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n}\right\}}(x) + 2^n \mathbb{1}_{\left\{2^n \le f \le +\infty\right\}}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in X$.$\Big]$

Définition-Proposition

$\leftarrow$ [idée : découpage de l'ensemble d'arrivée]

(a) Pour toute application mesurable positive $f\colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on note :

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \;:=\; \sup_{\varphi\colon X \to \mathbb{R}^+ \text{ étagée, } \varphi \le f} \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu \;\le\; +\infty.$$

$\leftarrow$ [il est clair que $f \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ croît]

Donc : $\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0 \iff f(x) = 0 \ \mu\text{-p.p.}\right)$ et $\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty \ \mu\text{-p.p.}\right)$.

(b) On note : $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) := \left\{ f\colon X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \;\middle|\; \|f\|_1 := \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une *fonction μ-intégrable sur X* est un élément de : $\mathscr{L}^1(\mu) := \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) + \mathrm{i}\,\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

On note : $\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu)$ quand $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ (*)

et $\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X \mathrm{Re}\, f \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_X \mathrm{Im}\, f \,\mathrm{d}\mu$ quand $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Donc $\mathscr{L}^1(\mu)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^X$ et $f \in \mathscr{L}^1(\mu) \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ est $\overbrace{\text{linéaire}}^{\text{pour } f,g \text{ mesurables} \ge 0, \text{ on a aussi : } \int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu}$. De plus :

$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \le \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ si $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $f \le g$, et, $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$ si $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

(c) Soit $A \in \mathcal{A}$. On note $\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_X \mathbb{1}_A f \,\mathrm{d}\mu$ pour $f\colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable ou $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Soit J un intervalle. On note $\mathscr{L}^1(J) := \mathscr{L}^1(\mathrm{d}x_J)$ où $\mathrm{d}x_J$ est la restriction à $(J, \mathscr{B}(J))$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$ sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, et, $\mathscr{L}^{1\,loc}(J) := \{ f\colon J \to \mathbb{C} \mid \forall a, b \in J \quad (a < b \implies f|_{[a,b]} \in \mathscr{L}^1([a,b])) \}$.

Théorème

(a) Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \inf_{k \ge n} f_k}_{\text{mesurable}} \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \lim_{n\to+\infty} \inf_{k \ge n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{« lemme de Fatou ».}$$

(b) Pour toute suite *croissante* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}_{\text{mesurable}} \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \qquad \underbrace{\text{« théorème de convergence monotone »}}_{\text{(appelé aussi « théorème de Beppo-Levi »)}}.$$

(c) On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de X dans $\mathbb{C}$.

On suppose que
- (i) la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour μ-presque tout $x \in X$;
- (ii) l'application $x \mapsto f_n(x)$ est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) il existe $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \le g(x)$ μ-p.p.

Alors
- il existe $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ μ-p.p. ;
- $\underbrace{\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu}_{\text{défini}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ « théorème de convergence dominée » (**).

(d) Soient $(f_n)_{n\ge 0} \in \mathscr{L}^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. On suppose que : $\|f_n - f\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\ge 0}$ de $(f_n)_{n\ge 0}$ qui converge simplement μ-presque partout vers f.

(*) Quand f est réelle, on pose : $f^+(x) := \max(0, f(x))$ et $f^-(x) := \max(0, -f(x))$ pour $x \in X$, donc $f = f^+ - f^-$.

(**) En particulier : si une suite d'applications continues $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ $(a < b)$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f, alors $\int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ (appliquer le théorème aux applications $f_n - f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$).

Proposition (« continuité et différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

On se donne un espace mesuré $(T, \mathcal{T}, \nu)$, $N \in \mathbb{N}$ et des applications $f_t\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^N}{\Omega} \to \mathbb{C}$, $t \in T$.

(a) On suppose que
- (i) l'application $t \mapsto f_t(x)$ est mesurable pour tout $x \in \Omega$;
- (ii) $a \in \Omega$ et f_t est continue en a pour ν-presque tout $t \in T$;
- (iii) il existe $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\nu)$ tel que $\sup_{x\in\Omega} |f_t(x)| \leq g(t)$ ν-p.p.

Alors l'application $F\colon x \in \Omega \mapsto \underbrace{\int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\nu(t)}_{\text{défini}}$ est continue en a.

(b) On suppose que
- (i) l'application $t \mapsto f_t(x)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\nu)$ pour tout $x \in \Omega$ $(***)$;
- (ii) Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f_t différentiable sur Ω pour ν-presque tout $t \in T$;
- (iii) il existe $\widetilde{g} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\nu)$ tel que $\sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{d}f_t(x)\| \leq \widetilde{g}(t)$ ν-p.p.

Alors
- l'application $F\colon x \in \Omega \mapsto \int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\nu(t)$ est différentiable sur Ω ;
- $\mathrm{d}F(x)\cdot h = \underbrace{\int_T \mathrm{d}f_t(x)\cdot h\;\mathrm{d}\nu(t)}_{\text{défini}}$ pour tous $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^N$.

Définition-Proposition ← [idée : découpage de l'ensemble de départ]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$.

(a) On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ d'intégrale $\mathcal{I}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ et $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, ..., $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$, on a :

$$\max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) < \alpha \quad\Longrightarrow\quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \;-\; \mathcal{I}\right| \;<\; \varepsilon.$$

(b) La mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifie la condition de « régularité » suivante :

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{\mathcal{O} \text{ ouvert de } \mathbb{R}\\ \mathcal{O}\supseteq A}} \lambda(\mathcal{O}) = \sup_{\substack{K \text{ compact de } \mathbb{R}\\ K\subseteq A}} \lambda(K) \qquad \text{pour tout } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

De plus, tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints et la mesure de Lebesgue d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ est sa longueur (égale à $\sup J - \inf J$ si $J \neq \emptyset$).

Une partie C de $\mathbb{R}$ est donc Lebesgue-négligeable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $((a_n, b_n))_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ avec $a_n < b_n$ quand $n \geq 0$, telle que : $C \subseteq \bigcup_{n\geq 0}]a_n, b_n[$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

(c) On a : f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement f est bornée et l'ensemble des points de discontinuité de f est Lebesgue-négligeable ; dans ce cas f est Lebesgue-intégrable de $[a,b]$ muni de la tribu de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne, et $\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{F(b)-F(a) \text{ si } f \text{ est}\\ \text{continue de primitive } F}} = \int_{[a,b]} \underbrace{f}_{\substack{\text{mesurable pour la tribu}\\ \text{complétée de } \mathscr{B}([a,b])}}(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition

(a) Pour toute application mesurable $f\colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et tout $a > 0$, on a :

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \tfrac{1}{a}\int_X f\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{« inégalité de Markov ».}$$

(b) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty$, alors $\mu(\text{réalisation d'une infinité de } A_n) = 0$ « lemme de Borel-Cantelli ».

Définition-Proposition

On considère une application mesurable positive $p\colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(a) La *mesure de densité p par rapport à μ* est la mesure $p\mu$ sur X déterminée par :

$$(p\mu)(A) := \int_A p\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

(b) Pour toute application $f\colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable, on a :

$$\int_X f\,\mathrm{d}p\mu = \int_X fp\,\mathrm{d}\mu.$$

On en déduit que pour toute application mesurable $f\colon X \to \mathbb{C}$, on a :

$$f \in \mathscr{L}^1(p\mu) \iff fp \in \mathscr{L}^1(\mu) \ ; \quad \text{dans ce cas : } \int_X f\,\mathrm{d}p\mu = \int_X fp\,\mathrm{d}\mu.$$

$(***)$ Lorsque Ω est convexe et $x_0 \in \Omega$, l'inégalité des accroissements finis permet de remplacer la condition (i) par la condition suivante : « l'application $t \mapsto f_t(x)$ est mesurable pour tout $x \in \Omega$ et $t \mapsto f_t(x_0)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\nu)$ ».