Limites inférieure et supérieure : mise au point (J-Y D)

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $-\infty, +\infty$ sont deux nouveaux éléments non-réels distincts. La définition qui suit sert à montrer qu'il existe une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ (la « topologie de l'ordre ») pour laquelle les voisinages d'un réel x_0 sont les parties contenant $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$, les voisinages de $-\infty$ sont les parties contenant $[-\infty, b[$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$, et les voisinages de $+\infty$ sont les parties contenant $]a, +\infty]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

Définition

On définit : $\quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}} \quad x \leq y \iff \big(x = -\infty \text{ ou } (x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq y) \text{ ou } y = +\infty\big)$.
On sait que toute partie non-vide de $\overline{\mathbb{R}}$ a pour $\leq$ une borne inférieure et une borne supérieure.

(a) On appelle *intervalle ouvert* de $\overline{\mathbb{R}}$ une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ de l'une des formes suivantes :
$\emptyset$, $\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x > a\}$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x < b\}$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage* de x_0 dans $\overline{\mathbb{R}}$ une partie V de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant un intervalle ouvert qui contient x_0. On notera $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0 dans $\overline{\mathbb{R}}$.

(c) On appelle *ouvert* de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui contient un voisinage de chacun de ses points. On appelle *fermé* de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ dont le complémentaire est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque

Les applications $f\colon \begin{array}{rcl} \overline{\mathbb{R}} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$ et $g\colon \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ y & \mapsto & \frac{y}{1-|y|} \end{array}$, définies par passage à la limite aux bornes de leur ensemble de définition, sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Une étude de limites immédiate montre que f et g sont continues.
Les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ sont donc, par exemple, les ouverts pour la distance d suivante :

$$d(a,b) := \left|\frac{a}{1+|a|} - \frac{b}{1+|b|}\right| \text{ pour tous } a, b \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que *$a$ est la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ quand $n \to +\infty$* si :
pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_n \in V$.

(b) On appelle *limite inférieure* de $(u_n)_{n\geq 0}$ la limite de la suite croissante $(\inf_{k\geq n} u_k)_{n\geq 0}$.(*)
On la note : $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n := \varliminf\limits_{n\to+\infty} u_n := \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k \in \overline{\mathbb{R}}$.

(c) On appelle *limite supérieure* de $(u_n)_{n\geq 0}$ la limite de la suite décroissante $(\sup_{k\geq n} u_k)_{n\geq 0}$.(*)
On la note : $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n := \varlimsup\limits_{n\to+\infty} u_n := \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k \in \overline{\mathbb{R}}$.

Définition-Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$).

(a) Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$). On dit que *a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$* si :
pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in V$.

(b) L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$).

Démonstration de (b)

On rappelle que l'intérieur d'une partie A d'un espace topologique X est formé des points de A dont un voisinage est inclus dans A. Par passage au complémentaire, sachant que $\overline{\complement_X A} = \complement_X \mathring{A}$, l'adhérence d'une partie B de X est formé des points de X dont tout voisinage coupe B.

Ainsi, en échangeant dans (a) les termes « pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ » et « pour tout $N \in \mathbb{N}$ », on constate que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ est égal à : $\bigcap\limits_{N\geq 0} \overline{\{u_n \; ; \; n \geq N\}}$. $\square$

(*) L'existence de la limite est classique. Elle est expliquée dans la démonstration de la dernière proposition.

Définition-Proposition

$\longleftarrow$ [valable dans tout espace métrique]

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$).

(a) On appelle *suite extraite* de $(u_n)_{n\geq 0}$ toute suite de la forme $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ où $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$.

(b) Les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ sont les limites des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$) extraites de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Démonstration de (b)

On fixe une distance d définissant la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$). Par exemple la distance d de la page précédente (resp. la distance usuelle sur $\mathbb{C}$).

($\subseteq$) Soit a une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$).

On construit par récurrence une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ dans $\mathbb{N}$. On pose $n_0 = 0$. On suppose n_k connu ($k \geq 0$) et pose $N = n_k+1$. On note n_{k+1} le plus petit entier $n \geq N$ tel que $u_n \in B(a, \frac{1}{k+1})$.

La suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est strictement croissante et vérifie $d(u_{n_k}, a) \leq \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$ donc $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

($\supseteq$) On suppose que a est la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$) d'une suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Soient $V \in \mathcal{V}(a)$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_k} \in V$ dès que $k \geq K$.
Quand $k \geq 0$, on a $n_{k+1} - n_k > 0$ puis $n_{k+1} - n_k \geq 1$. D'où, par récurrence : $n_k \geq k$ quand $k \geq 0$.
On pose : $k_0 = \max(K, N)$ et $n = n_{k_0}$. On a : $u_n \in V$ car $k_0 \geq K$, et, $n \geq k_0 \geq N$.

Ainsi a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$. □

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Dans ce cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Lorsque $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ car $\inf\limits_{k\geq n} u_k \leq u_n \leq \sup\limits_{k\geq n} u_k$ pour $n \geq 0$.

Lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, la définition-proposition précédente montre que toutes les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$, sont égales à l. □

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) La limite inférieure de $(u_n)_{n\geq 0}$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.$^{(\star)}$

(b) La limite supérieure de $(u_n)_{n\geq 0}$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Démonstration de (a) (même idée pour (b))

On pose : $a_n := \inf\limits_{k\geq n} u_k$ pour $n \geq 0$.

On vérifie que $(a_n)_{n\geq 0}$ tend vers la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

• La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ croît car $\{u_k\,;\, k \geq n+1\} \subseteq \{u_k\,;\, k \geq n\}$. On note : $L := \sup\{a_n\,;\, n \geq 0\}$.

Pour tout intervalle ouvert V de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant L, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \in V$; ensuite, pour tout $n \geq n_0$, on a : $a_{n_0} \leq a_n \leq L$ donc $a_n \in V$. Il en résulte que : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

• Pour chaque $N \geq 0$, la termes de la suite $(a_n)_{n\geq N}$ sont dans $\overline{\{u_k\,;\, k \geq N\}}$, donc L aussi. Ainsi $L \in \bigcap\limits_{N\geq 0} \overline{\{u_n\,;\, n \geq N\}}$, ce qui signifie que L est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

• Soit a une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$. D'après la définition-proposition précédente, a est limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$.
On a : $a_{n_k} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \geq 0$. D'où : $L \leq a$ en passant à la limite. □

($\star$) Étant donné une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\liminf_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \min_{(u_{n_k}+v_{n_k})_{k\geq 0} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}}} \lim_{k\to+\infty} (u_{n_k} + v_{n_k}) = \liminf_{n\to+\infty} u_n + \ell.$$