

Complément : intermède musical

Une corde de longueur L et de masse linéique λ est fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$, avec une tension T_0 en chaque point. On pose : $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{T_0}}$.

On note $f(x, t)$ la hauteur du point de la corde d'abscisse $x \in [0, L]$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$, $\varphi: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ la position initiale et $\psi: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ la vitesse initiale.

Résolution de l'équation des cordes vibrantes

On suppose ici que φ est de classe C^3 et ψ est de classe C^2 avec :

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = 0 \quad \text{et} \quad \underbrace{\varphi''(0) = \varphi''(L) = \psi''(0) = \psi''(L) = 0}_{\text{imposé par l'équation des cordes vibrantes quand } f \text{ est de classe } C^3}$$

L'unique solution $f: [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 de l'équation des cordes vibrantes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) & \text{et} & f(0, t) = f(L, t) = 0 \\ f(x, 0) = \varphi(x) & \text{et} & \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

s'écrit, en notant $b_n(u) = \frac{2}{L} \int_0^L u(t) \sin(\frac{n\pi t}{L}) dt$ lorsque $u \in L^1([0, L])$ et $n \geq 1$:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi x}{L}) \left(b_n(\varphi) \cos(\frac{n\pi\omega t}{L}) + \frac{L}{n\pi\omega} b_n(\psi) \sin(\frac{n\pi\omega t}{L}) \right)$$

(Le terme associé à n après le symbole de sommation s'appelle « l'harmonique de rang n ».)

Les fréquences ν_n obtenues, inverses des périodes des fonctions $t \mapsto \sin(\frac{n\pi\omega t}{L})$, sont les multiples de la « fréquence fondamentale » $\nu_1 = \frac{\omega}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\lambda}{T_0}}$.

Des notes de fréquences ν et 2ν sonnent de la même manière à l'oreille.

Cas de la guitare

On lâche le point de la corde d'abscisse a à la hauteur h sans vitesse initiale :

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi \text{ est affine sur } [0, a] \text{ et } [a, L] \text{ avec } \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \text{ et } \varphi(a) = h.$$

$$\text{On obtient : } f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{a(L-a)} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin(\frac{n\pi a}{L}) \sin(\frac{n\pi x}{L}) \cos(\frac{n\pi\omega t}{L})$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } b_n(\varphi) &= \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(t) \sin(\frac{n\pi t}{L}) dt = \frac{2}{L} \int_0^a \frac{ht}{a} \sin(\frac{n\pi t}{L}) dt + \frac{2}{L} \int_a^L \frac{h(L-t)}{L-a} \varphi(t) \sin(\frac{n\pi t}{L}) dt \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{L} \left[\frac{ht}{a} \frac{L}{n\pi} (-\cos(\frac{n\pi t}{L})) \right]_0^a + \frac{2}{L} \int_0^a \frac{h}{a} \frac{L}{n\pi} \cos(\frac{n\pi t}{L}) dt \\ &\quad + \frac{2}{L} \left[\frac{h(L-t)}{L-a} \frac{L}{n\pi} (-\cos(\frac{n\pi t}{L})) \right]_a^L - \frac{2}{L} \int_a^L \frac{h}{L-a} \frac{L}{n\pi} \cos(\frac{n\pi t}{L}) dt. \end{aligned}$$

Les intensités décroissent rapidement, sans harmonique paire lorsque $a = \frac{L}{2}$.

La 5^e corde de la guitare, du La₁ de fréquence fondamentale 110 Hz, se règle à l'aide d'un diapason (440 Hz) en modifiant la tension T_0 . Pour obtenir la gamme tempérée, Do Do \sharp Ré Ré \sharp Mi Fa Fa \sharp Sol Sol \sharp La La \sharp Si Do, dont les fréquences sont en progression géométrique de raison $\sqrt[12]{2}$, la k^e frette (trait métallique où s'appuie la corde) est placée à la distance $(1 - 2^{-\frac{k}{12}})L$ du sillet de tête (barre en plastique qui supporte la corde en haut du manche).

La tierce majeure Do₃ Mi₃ est quasiment formée d'harmoniques de Do₁ car les rapports des fréquences de Do₃ et Do₁ d'une part, et de Mi₃ et Do₁ d'autre part, sont 4 et $2^{2+4/12} = 5,039\dots$

La tierce mineure Mi₃ Sol₃ est quasiment formée d'harmoniques de Do₁ car les rapports des fréquences de Mi₃ et Do₁ d'une part, et de Sol₃ et Do₁ d'autre part, sont $2^{2+4/12} = 5,039\dots$ et $2^{2+7/12} = 5,993\dots$

Il en résulte que la quinte Do₃ Sol₃ est quasiment formée d'harmoniques de Do₁, avec rapport $\frac{3}{2}$.

La gamme pythagoricienne définit autrement les notes, avec des fréquences dans ce rapport $\frac{3}{2}$:

Fa Do Sol Ré La Mi Si Fa \sharp Do \sharp Sol \sharp Ré \sharp La \sharp . Elle identifie la note Mi \sharp suivante avec le Fa qui se trouve 7 octaves au-dessus du premier Fa, car le rapport de fréquences est $\frac{(3/2)^{12}}{2^7} = 1,013\dots$

Cas du piano

On frappe la corde en position d'équilibre à plat sur une petite largeur l à la vitesse v :

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \psi = v \mathbb{1}_{[a, a+l]} \quad \text{où } 0 < a < a+l < L.$$

On obtient, en approximant $\int_a^{a+l} \sin(\frac{n\pi t}{L}) dt$ par $l \sin(\frac{n\pi a}{L})$, ce qui conserve les fréquences :

$$f(x, t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2vl}{n\pi\omega} \sin(\frac{n\pi a}{L}) \sin(\frac{n\pi x}{L}) \sin(\frac{n\pi\omega t}{L})$$

On a : $b_n(\psi) = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(t) \sin(\frac{n\pi t}{L}) dt = \frac{2}{L} \int_a^{a+l} v \sin(\frac{n\pi t}{L}) dt.$

Dans le cas de la corde du La₂ de fréquence fondamentale 220 Hz ($L = 0,715$, $\omega = 314,5$, $a = 0,077$ avec $l = 0,01$), on obtient un spectre qui ne contient pas l'harmonique $n = 9$.