

# Complément : règles d'Abel (J-Y D)

**Lemme** (« transformation d'Abel », immédiate et vue en TD)

Soient  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  des suites dans  $\mathbb{C}$ . Pour  $p \leq q$  dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a :

$$\sum_{n=p}^q u_n v_n = -u_p V_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (u_n - u_{n+1}) V_n + u_q V_q \quad \text{où} \quad V_n := \sum_{1 \leq k \leq n} v_k \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (V_0 = 0).$$

## Proposition

Soient  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite dans  $\mathbb{C}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  une suite dans un espace de Banach complexe  $E$ . (Dans la pratique,  $E$  sera :  $\mathbb{C}$  ou  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$  ou  $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$  avec  $K$  compact de  $\mathbb{C}$ .)

Si  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \left( \sum_{n \geq 1} |u_{n+1} - u_n| \right) \text{ converge} \\ \text{(ii) la suite } \left( \sum_{k=1}^n v_k \right)_{n \geq 1} \text{ est bornée} \end{array} \right.$  alors la série  $\left( \sum_{n \geq 1} u_n v_n \right)_{n \geq 1}$  converge.

Par exemple<sup>(\*)</sup> : - (i) est vérifié quand  $(u_n)_{n \geq 1}$  est réelle décroissante et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  ;

cf. en bas de page le cas des « séries alternées »

- (ii) est vérifié quand  $(v_n)_{n \geq 1} = ((-1)^n)_{n \geq 1}$ .

## DÉMONSTRATION

Soient  $p \leq q$  dans  $\mathbb{N}$ . D'après le lemme, on a :  $\left\| \sum_{n=p}^q u_n v_n \right\| \leq (|u_p| + \sum_{n=p}^{q-1} |u_n - u_{n+1}| + |u_q|) \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n v_k \right|$ .

L'hypothèse (i) et le critère de Cauchy assurent que :  $|u_p| + \sum_{n=p}^{q-1} |u_n - u_{n+1}| + |u_q| \xrightarrow{p \leq q \text{ et } p \rightarrow +\infty} 0$ .

Le critère de Cauchy (condition suffisante de convergence maintenant) permet d'en déduire que  $\left( \sum_{n \geq 1} u_n v_n \right)_{n \geq 1}$  converge.  $\square$

**Lemme** (« deuxième formule de la moyenne »)

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  positive décroissante et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable ( $a < b$ ).

Il existe  $\xi \in [a, b]$  tel qu'on ait :  $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a^+) \int_a^\xi g(x) dx$ .

## DÉMONSTRATION

• On traite d'abord le cas où  $f$  est de la forme  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{[a_{i-1}, a_i[}$  avec  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$  et  $a = a_0 < \dots < a_n = b$ .

On introduit l'application continue  $G : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x g(t) dt$ . On pose  $m = \min_{x \in [a, b]} G(x)$  et  $M = \max_{x \in [a, b]} G(x)$ .

On utilise le premier lemme avec  $V_i = G(a_i)$  :  $\int_a^b f(x) g(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(x) dx = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i+1}) G(a_i) + \alpha_n G(a_n)$ .

Il en résulte que  $\int_a^b f(x) g(x) dx \in [\alpha_1 m, \alpha_1 M]$  où  $\alpha_1 = f(a_+)$ . Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

• Dans le cas général, on a  $0 \leq f(x) \leq f(a_+)$  quand  $x \in ]a, b]$ . On note  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite définie via les  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  par  $f_n(x) = \frac{k+1}{n} f(a^+)$  si  $\frac{k}{n} f(a^+) < f(x) \leq \frac{k+1}{n} f(a^+)$ ,  $f_n(x) = 0$  si  $f(x) = 0$  et  $f_n(x) = f(x)$ . Donc  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{f(a^+)}{n}$ .

Par le premier cas, il existe une suite  $(\xi_n)_{n \geq 0}$  dans  $[a, b]$  telle que :  $\int_a^b f_n(x) g(x) dx = f(a^+) \int_a^{\xi_n} g(x) dx$  pour  $n \geq 0$ .

On extrait de  $(\xi_n)_{n \geq 0}$  une suite  $(\xi_k)_{k \geq 0}$  convergente dans  $[a, b]$ , de limite  $\xi$ . Donc  $\int_a^{\xi_k} g(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_a^\xi g(x) dx$ .

Par le théorème de convergence dominée, on a aussi  $\int_a^b f_n(x) g(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) g(x) dx$ . D'où le résultat.  $\square$

## Proposition (\*\*)

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $-\infty < a < b \leq +\infty$ .

Si  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} 0 \text{ et } f \text{ décroît} \\ \text{(ii) } g \in \mathcal{L}^{1_{loc}}([a, b]) \text{ et } x \mapsto \int_a^x g(t) dt \text{ est bornée} \end{array} \right.$  alors l'intégrale  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  converge.

## DÉMONSTRATION

Soient  $a \leq \alpha \leq \beta < b$ . D'après le lemme, on a :  $\left| \int_\alpha^\beta f(x) g(x) dx \right| \leq f(\alpha^+) \sup_{\alpha \leq \xi \leq \beta} \left| \int_\alpha^\xi g(t) dt \right| \leq 2 f(\alpha^+) \sup_{a \leq x < b} \left| \int_a^x g(t) dt \right|$ .

Le membre de droite de cette inégalité pouvant être rendu arbitrairement petit en réalisant une condition de la forme  $\alpha \geq A$ , il résulte du critère de Cauchy que l'intégrale généralisée  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  converge pour la borne  $b$ .  $\square$

(\*) Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante de limite nulle dans  $\mathbb{R}^+$  et  $S_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ . On a :  $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$  croît,  $(S_{2k})_{k \geq 0}$  décroît, et  $S_{2k+1} - S_{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $(S_n)_{n \geq 0}$  a une limite  $S \in \mathbb{R}$  et  $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$  pour  $k \geq 0$ . De plus :  $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$  est du signe de  $(-1)^{n+1} u_{n+1}$  ( $S - R_{2k+1} \leq S \leq S - R_{2k}$ ) et  $|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}|$ .

(\*\*) Quand  $f$  est de classe  $C^1$  et  $g$  est continue, cette proposition découlerait d'une intégration par parties.