Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$: à retenir (J-Y D)

Définition

Soient $f, g\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^k ($p, q \in \mathbb{N}$ et $k \in (\mathbb{N}\setminus\{0\}) \cup \{+\infty\}$), et $a \in U$.

(a) On dit que f est *une submersion en a* si $\mathrm{d}f(a)$ est surjective (c'est-à-dire : $\operatorname{rg} \mathrm{d}f(a) = q$).
On dit que f est *une submersion* si elle est une submersion en tout point de U.

(b) On dit que g est *une immersion en a* si $\mathrm{d}g(a)$ est injective (c'est-à-dire : $\operatorname{rg} \mathrm{d}g(a) = p$).
On dit que g est *une immersion* si elle est une immersion en tout point de U.

On dit que g est *un plongement* si g est une immersion et $\begin{array}{l} U \to g(U) \\ x \mapsto g(x) \end{array}$ est un homéomorphisme.

Théorème (« théorème du rang constant »)

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^k ($p, q \in \mathbb{N}$ et $k \in (\mathbb{N}\setminus\{0\}) \cup \{+\infty\}$), $a \in U$ et $r \in \mathbb{N}$.

(a) On a : f est une submersion en a si et seulement si $p \geq q$ et il existe un C^k-difféomorphisme $\varphi\colon \underset{\text{ouvert de } U \text{ contenant } a}{V} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{V'}$ tel que : $f|_V\colon x = \underbrace{\varphi^{-1}}_{\substack{\text{du coté du} \\ \text{gros espace}}}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in V \longmapsto y = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$.

L'ensemble des points de U où f est une submersion est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

(b) On a : f est une immersion en a si et seulement si $p \leq q$ et il existe un C^k-difféomorphisme $\psi\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q \text{ contenant } f(a)}{W} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q}{W'}$ tel que : $f(V) \subseteq W$ et $f|_V\colon x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in V \longmapsto y = \underbrace{\psi^{-1}}_{\substack{\text{du coté du} \\ \text{gros espace}}}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$.

L'ensemble des points de U où f est une immersion est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

(c) Le rang de f est égal à r au voisinage de a si et seulement si $p \geq r$ et $q \geq r$ et il existe des C^k-difféomorphismes $\varphi\colon \underset{\text{ouvert de } U \text{ contenant } a}{V} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{V'}$ et $\psi\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q \text{ contenant } f(a)}{W} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q}{W'}$ tels que :

$$f(V) \subseteq W \quad \text{et} \quad \underbrace{f|_V\colon x = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in V \longmapsto y = \psi^{-1}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q.}_{\text{c'est-à-dire : } \forall x' = (x'_1, \ldots, x'_p) \in V' \quad \psi(f(\varphi^{-1}(x'))) = (x'_1, \ldots, x'_r, 0, \ldots, 0)}$$

Définition-Proposition

Soient $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $k \in (\mathbb{N}\setminus\{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $d \in \mathbb{N}$.

(a) On dit que S est une *une sous-variété de classe C^k et dimension d de $\mathbb{R}^n$* si pour tout $a \in S$, il existe un C^k-difféomorphisme $c\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } a}{U} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{U'}$ tel que $c(U \cap S) = c(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

Dans ce cas *l'espace vectoriel tangent à S en $a \in S$* est le sous-espace vectoriel suivant de $\mathbb{R}^n$:
$T_a S \overset{\text{définition}}{=} \left\{\gamma'(0)\ ;\ \gamma\colon \underset{\substack{\text{intervalle} \\ \text{ouvert contenant } 0}}{I} \to \mathbb{R}^n \text{ de classe } \mathrm{C}^k,\ \gamma(I) \subseteq S \text{ et } \gamma(0) = a\right\} \overset{\text{proposition}}{=} (\mathrm{d}c(a))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

(b) Lorsque $S = f^{-1}(\{0\})$ avec $f\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^k et f submersion en tout point de S, on a :

S est une sous-variété C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $\boxed{T_a S = (\mathrm{d}f(a))^{-1}(\{0\})}$ pour $a \in S$.

(c) Lorsque $S = \operatorname{Im} g$ avec $g\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ plongement C^k, on a :

S est une sous-variété C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $\boxed{T_{g(t)} S = \operatorname{Im} \mathrm{d}g(t)}$ pour $t \in \Omega$.

nécessaire localement (réalisera (b) et (c))

(d) On se donne une bijection $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ et note :

$\widetilde{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Lorsque $\underbrace{S = \widetilde{\sigma}(\text{graphe}(h))}_{\text{c'est-à-dire } S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\sigma(d+1)} = h_1(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}) \text{ et } \ldots \text{ et } x_{\sigma(n)} = h_{n-d}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)})\}}$ avec $h\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^k, on a d'après (b) avec $g(t) = \widetilde{\sigma}(t, h(t))$:

S est une sous-variété C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $\underbrace{\boxed{T_a S = \widetilde{\sigma}(\text{graphe}(\mathrm{d}h(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(d)})))}}_{\text{c'est-à-dire } T_a S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\sigma(d+1)} = \mathrm{d}h_1(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(d)})\cdot(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}) \text{ et } \ldots \text{ et } x_{\sigma(n)} = \mathrm{d}h_{n-d}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(d)})\cdot(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)})\}}$ pour $a \in S$.

Remarques

(a) Tout ouvert d'une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^n$.

(b) Pour démontrer qu'une application est un plongement, on pourra utiliser le résultat suivant.

Si $g\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{\Omega'}$ est une application continue telle que

$$\underbrace{\forall \underset{\text{compact}}{K'} \subseteq \Omega' \quad \exists \underset{\text{compact}}{K} \subseteq \Omega \quad \forall x \in \Omega \quad (x \notin K \implies g(x) \notin K').}_{\text{on traduit cela en notant : } g(x) \underset{x\to\infty_\Omega}{\longrightarrow} \infty_{\Omega'}}$$

alors, l'image par l'application g d'un fermé de Ω est un fermé de Ω'. $\longleftarrow$ [idée : $\Omega \cup \{\infty_\Omega\}$ est compact]

Définition-Proposition

Soient X, Y, Z des sous-variétés de classe C^k de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$ ($k \in (\mathbb{N}\backslash\{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m, l \in \mathbb{N}$).

(a) On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *de classe C^k* si :

$$\forall a \in X \qquad \exists\, \widetilde{f}\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } a}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m \;\; \mathrm{C}^k \qquad f|_{U\cap X} = \widetilde{f}|_{U\cap X}\,.^{(\star)}$$

Dans ce cas, pour $a \in X$ l'application $\begin{array}{rcl} T_a f\colon T_a X & \to & T_{f(a)} Y \\ v & \mapsto & \mathrm{d}\widetilde{f}(a)\cdot v \end{array}$ est indépendante du choix de $\widetilde{f}$.

(b) Si $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont de classe C^k, alors $g \circ f\colon X \to Z$ est de classe C^k et pour tout $a \in X$ on a : $\boxed{T_a(g\circ f) = T_{f(a)} g \circ T_a f}$.

(c) On dit qu'une application $\varphi\colon X \to Y$ est *un C^k-difféomorphisme* si :

φ est une bijection, φ est de classe C^k, et φ^{-1} est de classe C^k.

Définition-Proposition

Soient $f, g\colon \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^n}{X} \longrightarrow \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^m}{Y}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N}\setminus\{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$).

(a) Pour tout $a \in X$, on dit que f est *une submersion en a* si $T_a f$ est surjective.

On dit que f est *une submersion* si elle est une submersion en tout point de X.

Dans ce cas, pour chaque $b \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{b\})$ est une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ et on a $\boxed{T_a(f^{-1}(\{b\})) = (T_a f)^{-1}(\{0\})}$ pour $a \in f^{-1}(\{b\})$.

(b) Pour tout $a \in X$, on dit que g est *une immersion en a* si $T_a g$ est injective.

On dit que g est *une immersion* si elle est une immersion en tout point de X.

On dit que g est *un plongement* si g est une immersion et $\begin{array}{rcl} X & \to & g(X) \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ est un homéomorphisme.

Dans ce cas $\operatorname{Im} g$ est une sous-variété C^k de $\mathbb{R}^m$ et on a $\boxed{T_{g(a)}(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} T_a g}$ pour $a \in X$.

Théorème (« théorème d'inversion locale »)

Soient $f\colon \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^n}{X} \to \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^m}{Y}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N}\backslash\{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$) et $a \in X$.

Si $T_a f$ est bijective, alors il existe un ouvert X_0 de X contenant a et un ouvert Y_0 de Y contenant $f(a)$ tels que f se restreint en un C^k-difféomorphisme $\begin{array}{rcl} f_0\colon X_0 & \to & Y_0 \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Théorème (« théorème d'inversion globale »)

Soit $f\colon \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^n}{X} \longrightarrow \underset{\text{sous-variété } \mathrm{C}^k \text{ de } \mathbb{R}^m}{Y}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N}\setminus\{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$).

Si f est injective et $T_x f$ est bijective pour tout $x \in X$, alors la partie $f(X)$ de Y est ouverte et l'application $\begin{array}{rcl} X & \to & f(X) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un C^k-difféomorphisme

---

($\star$) Il en résulte immédiatement que si $f\colon X \to Y$ est de classe C^k et, X_0 et Y_0 sont des sous-variétés de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ telles que $X_0 \subseteq X$ et $Y_0 \subseteq Y$ avec $f(X_0) \subseteq Y_0$, alors $\begin{array}{rcl} X_0 & \to & Y_0 \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est de classe C^k.