Suites de fonctions différentiables (J-Y D)

Voici un résultat qui généralise le théorème « convergence uniforme et dérivabilité » de L2. On fixe des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés E et F de dimension finie (par exemple $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$).

Proposition 1 (« convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient $f_n\colon \underset{\text{ouvert convexe de } E}{U} \longrightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$, des applications vérifiant :

(i) il existe $x_0 \in U$ tel que la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 0}$ converge ;

(ii) les applications f_n, $n \in \mathbb{N}$ sont différentiables ;

(iii) la suite $(\mathrm{D}f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée B de U, vers une fonction différentiable f telle que : $\mathrm{D}f(x)\cdot h = \big(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{D}f_n(x)\big)\cdot h = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{D}f_n(x)\cdot h)$ pour $x \in U$ et $h \in E$.

Démonstration

On se donne une partie bornée B de U. On va d'abord démontrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur B. Comme F est complet, l'ensemble F^B des applications de B dans F est complet pour la distance d_u de la convergence uniforme. Il suffit donc de vérifier que $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la convergence uniforme. Pour cela on relie les valeurs prises par f_n avec $f_n(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in B$ et $p > q$ dans $\mathbb{N}$, on a :
$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)\| + \|f_p(x_0) - f_q(x_0)\|$
puis d'après l'inégalité des accroissements finis et par convexité de U :
$\|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)\| \leq \|\mathrm{D}f_p - \mathrm{D}f_q\|_\infty \|x - x_0\| \leq \|\mathrm{D}f_p - \mathrm{D}f_q\|_\infty K$ où $K := \sup\limits_{b\in B}\|b\| + \|x_0\|$.
On choisit $Q \in \mathbb{N}$ tel que : $\|\mathrm{D}f_p - \mathrm{D}f_q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$ et $\|f_p(x_0) - f_q(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $p > q \geq Q$.
Ainsi : $\sup_{x\in B}\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \frac{\varepsilon K}{2(K+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dès que $p > q \geq Q$.
Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de U.

Pour tout $x \in U$, on note : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cf. le cas où $B = \{x\}$) et $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{D}f_n(x)$.
Il reste à démontrer que f est différentiable en tout $a \in U$ et $\mathrm{D}f(a) = g(a) = (h \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{D}f_n(a)\cdot h))$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $h \in E \setminus \{0\}$ tel que $a + h \in U$ et $q \in \mathbb{N}$, on a :
$\frac{\|f(a+h) - f(a) - g(a)\cdot h\|}{\|h\|} \leq \frac{\|\lim\limits_{p\to+\infty}((f_p - f_q)(a+h) - (f_p - f_q)(a))\|}{\|h\|} + \frac{\|f_q(a+h) - f_q(a) - \mathrm{D}f_q(a)\cdot h\|}{\|h\|} + \frac{\|(\mathrm{D}f_q(a) - g(a))\cdot h\|}{\|h\|}$.
Or l'inégalité des accroissements finis donne : $\|(f_p - f_q)(a+h) - (f_p - f_q)(a)\| \leq \|\mathrm{D}f_p - \mathrm{D}f_q\|_\infty \|h\|$.

Il en résulte que : $(\star)$ $\frac{\|f(a+h) - f(a) - g(a)\cdot h\|}{\|h\|} \leq \|g - \mathrm{D}f_q\|_\infty + \frac{\|f_q(a+h) - f_q(a) - \mathrm{D}f_q(a)\cdot h\|}{\|h\|} + \|\mathrm{D}f_q - g\|_\infty$.
On choisit $Q \in \mathbb{N}$ tel que : $\|g - \mathrm{D}f_q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ dès que $q \geq Q$.
On prend maintenant $q = Q$ et choisit $\alpha > 0$ tel que : $\frac{\|f_Q(a+h) - f_Q(a) - \mathrm{D}f_Q(a)\cdot h\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{3}$ dès que $\|h\| < \alpha$.
Ainsi, on obtient à partir de l'inégalité $(\star)$: $\frac{\|f(a+h) - f(a) - g(a)\cdot h\|}{\|h\|} < \varepsilon$ dès que $\|h\| < \alpha$.
On en conclut que f est différentiable en a et $\mathrm{D}f(a) = g(a)$.

Pour terminer, on remarque que l'application linéaire $l \mapsto l(h)$ de $\mathscr{L}(E, F)$ dans F est continue.
D'où : $\mathrm{D}f(a)\cdot h = g(a)\cdot h = \big(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{D}f_n(a)\big)(h) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{D}f_n(a)(h))$ pour tout $h \in E$. $\square$

Proposition 2 (« différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

On se donne un espace mesuré $(T,\mathscr{T},\nu)$, $N\in\mathbb{N}$ et des applications $f_t\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^N}{\Omega} \to \mathbb{C},\ t\in T$.

On suppose que
(i) f_t est différentiable sur Ω pour μ-presque tout $t\in T$;
(ii) l'application $t\mapsto f_t(x)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ pour tout $x\in\Omega$; (*)
(iii) il existe $\widetilde{g}\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que $\sup\limits_{x\in\Omega}\|\mathrm{D}f_t(x)\|\le\widetilde{g}(t)$ μ-p. p. .

Alors
l'application $F\colon x\mapsto\int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\mu(t)$ est différentiable sur Ω ;
$\mathrm{D}F(x)\cdot h=\underbrace{\int_T \mathrm{D}f_t(x)\cdot h\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}}$ pour tous $x\in\Omega$ et $h\in\mathbb{R}^N$.

Démonstration (idée)

Soit $a\in\Omega$. On se donne $h_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ dans $\mathbb{R}^N$ avec $h_n\neq0$ et $[a,a+h_n]\subseteq\Omega$ pour $n\ge0$. On a :

$$\frac{F(a+h_n)-F(a)-\int_T \mathrm{D}f_t(a)\cdot h_n\,\mathrm{d}\mu(t)}{\|h_n\|}=\int_T\frac{f_t(a+h_n)-f_t(a)-\mathrm{D}f_t(a)\cdot h_n}{\|h_n\|}\,\mathrm{d}\mu(t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\ \text{ car}$$

$$\frac{|f_t(a+h_n)-f_t(a)-\mathrm{D}f_t(a)\cdot h_n|}{\|h_n\|}\le\sup_{0\le\theta\le1}\|\mathrm{D}f_t(a+\theta h_n)-\mathrm{D}f_t(a)\|\ \text{ pour } \mu\text{-presque tout } t\in T.\qquad\square$$

Proposition 3 (« holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

résultat qui sera utilisé après le cours sur les fonctions holomorphes

On reprend les données de la proposition 2 avec pour Ω un ouvert de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$.

On suppose que
(i) f_t est holomorphe sur Ω pour μ-presque tout $t\in T$;
(ii) l'application $t\mapsto f_t(z)$ est mesurable pour tout $z\in\Omega$;
(iii) il existe $g\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que $\sup\limits_{z\in\Omega}|f_t(z)|\le g(t)$ μ-p. p. .

Alors
l'application $F\colon z\mapsto\int_T f_t(z)\,\mathrm{d}\mu(t)$ est holomorphe sur Ω ;
$F^{(n)}(z)=\underbrace{\int_T f_t^{(n)}(z)\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}}$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $z\in\Omega$.

Démonstration (idée)

On rappelle qu'une application $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est différentiable et l'application $\mathrm{D}f(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z\in\Omega$ (équation de Cauchy-Riemann). Dans ce cas, pour tout $z\in\Omega$ on dispose d'un unique $f'(z)\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{D}f(z)\colon h\in\mathbb{C}\mapsto f'(z)\,h$.

Soient $a\in\Omega$ et $r>0$ tels que $\overline{B(a,r)}\subseteq\Omega$. Toute fonction holomorphe $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ vérifie : $f'(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)^+}\frac{f(u)}{(u-z)^2}\,\mathrm{d}u$ pour tout $z\in B(a,r)$ (cf. l'analycité des fonctions holomorphes).
D'où : $\sup\limits_{z\in B(a,\frac{r}{2})}|f_t'(z)|=\sup\limits_{z\in B(a,\frac{r}{2})}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)^+}\frac{f_t(u)}{(u-z)^2}\,\mathrm{d}u\right|\le\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\times2\pi r\times\frac{g(t)}{(\frac{r}{2})^2}$ μ-presque partout.
Ainsi, la famille $(f_t'|_{B(a,\frac{r}{2})})_{t\in T}$ vérifie une hypothèses analogue à (iii) qui porte sur $(f_t)_{t\in T}$.

On applique la proposition 2 sur l'ouvert $B(a,\frac{r}{2})$ contenant $z:=a$, puis fait une récurrence. $\square$

(*) Lorsque Ω est convexe et $x_0\in\Omega$, l'inégalité des accroissements finis permet de remplacer la condition (ii) par la condition suivante : « l'application $t\mapsto f_t(x)$ est mesurable pour tout $x\in\Omega$ et $t\mapsto f_t(x_0)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ».