1) Donner des exemples de sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ associés aux situations suivantes :

(i) A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$;

(ii) A n'a pas de minorant ;

(iii) A n'a pas de majorant ;

(iv) A a un majorant, mais n'a pas de maximum ;

(v) A a une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, mais n'a pas de minimum.

Démonstration

On va se servir d'un outil qui d'un point de vue chronologique, ne peut être utilisé pour obtenir des résultats dans le cours : la notion de limite et la conservation des inégalités larges par passage à la limite.

(i) On pose $A = \mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathscr{M}$ des majorants $m \in \mathbb{R}$ de A est $\emptyset$, car :
si $m \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $x \to +\infty$ donne $m \geq +\infty$ contradiction.

Parmi les éléments de $\mathscr{M}$ il n'y a pas de plus petit élément.

Ainsi : $\mathbb{R}$ n'a pas de borne supérieure.

(ii) On pose $A = \mathbb{R}$.

On suppose par l'absurde que A a un minorant, noté m.

Ona : $m \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $x \to -\infty$ donne $m \leq -\infty$ contradiction.

Il en résulte que $\mathbb{R}$ n'a pas de minorant.

(iii) On a obtenu au (i) que $\mathbb{R}$ n'a pas de majorant.

(iv) On pose $A = [0, 1[$. Il est clair que 1 majore A.

On suppose par l'absurde que A a un plus grand élément (c'est-à-dire un maximum), noté m.

On a : $m \geq x$ pour tout $x \in [0, 1[$, donc $x \to 1^-$ donne $m \geq 1$ contradiction.

On obtient : $[0, 1[$ a un majorant mais n'a pas de maximum.

(v) On pose $A =]0, 1]$. Il est clair que 0 minore A.

Réciproquement, un minorant m de A vérifie :
$m \leq x$ pour tout $x \in]0, 1]$, donc $x \to 0^+$ donne $m \leq 0$.

Par conséquent 0 est le plus grand des minorants de A, c'est-à-dire : $\inf]0, 1] = 0$.

De plus, si m est le minimum de A, alors m est un minorant de A, donc comme on vient de le voir $m \leq 0$, a fortiori $m \in A$ contradiction.

D'où : A n'a pas de minimum.