10) On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}, (v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \tfrac{1}{j!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \tfrac{1}{n.n!}.$$

a) Montrer qu'elles forment un couple de suites adjacentes.
On appellera ρ leur limite commune.

b) Trouver une valeur décimale approchée de ρ à 10^{-3} près.

c) *Question subsidiaire.*
Montrer qu'il existe un nombre $\theta_n \in]0,1[$ tel que $\rho = u_n + \frac{\theta_n}{n.n!}$. En déduire que ρ n'est pas rationnel (on observera que l'égalité $\rho = m/n$, avec m entier, est incompatible avec la relation ci-dessus).

Démonstration

a) On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$. De plus :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \tfrac{1}{(n+1).(n+1)!} - \tfrac{1}{n.n!} = \tfrac{1}{(n+1)!} + \tfrac{1}{(n+1).(n+1)!} - \tfrac{1}{n.n!} \\ &= \tfrac{1}{n.(n+1).(n+1)!}(n(n+1) + n - (n+1)^2)) = -\tfrac{1}{n.(n+1).(n+1)!} \end{aligned}$$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ qui croît, et $(v_n)_{n\geq 0}$ qui décroît, sont adjacentes car :
$v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$ donc $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{n}$ avec $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) D'après le cours, on a : $u_n \leq \rho \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$.
Or $v_6 - u_6 = \frac{1}{6.6!} = \frac{1}{4320} < \frac{1}{2}10^{-3}$.
Donc : $u_6 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1440+360+120+30+6+1}{720}$
ce qui donne $u_6 = \frac{1957}{720} \in [2{,}718; 2{,}7181]$.
En conclusion : 2,718 est une valeur décimale approchée de ρ à 10^{-3} près.

c) L'inégalité du début du b) entraine que :
$u_n < u_{n+1} \leq \rho \leq v_{n+1} < v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ pour tout $n \geq 1$,
donc $\rho = u_n + \frac{\theta_n}{n.n!}$ pour un certain $\theta_n \in]0,1[$ pour tout $n \geq 1$
puis $n.n!(\rho - u_n) \in]0,1[$ pour tout $n \geq 1$.

On suppose, par l'absurde que $\rho \in \mathbb{Q}$. Sachant que $\rho \geq u_1 > 0$, cela implique qu'il existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\rho = m/n$.
En particulier : $n.n!(\rho - u_n) \in \mathbb{Z}$ *contradiction avec « $n.n!(\rho - u_n) \in]0,1[$ ».*

Conclusion : $\rho \notin \mathbb{Q}$.