11) On considère la suite (v_n) déterminée par :

$$v_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}.$$

a) Étudier la fonction $f\colon x > 0 \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est défini et $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

b) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad |v_{n+1} - v_n| \leq \frac{4}{9}\,|v_n - v_{n-1}|$.

c) Montrer que la fonction $f \circ f$ est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$; en déduire que les suites $(v_{2p})_{p\geq 0}$ et $(v_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont adjacentes ; calculer leur limite commune r.

d) Montrer qu'on a : $\forall n \geq 1 \quad |v_{n+1} - r| \leq \frac{4}{9}\,|v_n - r|$; quelle valeur suffit-il de donner à l'entier n pour avoir $|v_n - r| \leq \frac{1}{1000}$?

Démonstration

a) L'application f est dérivable et $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$.
De plus $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
L'application f est donc strictement décroissante de $+\infty$ à 1.
Or : $f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2} \in [\frac{3}{2}, 2]$ et $f(2) = \frac{3}{2} \in [\frac{3}{2}, 2]$. D'où $f([\frac{3}{2}, 2]) \subseteq [\frac{3}{2}, 2]$.
La condition initiale $v_0 = 2 \in [\frac{3}{2}, 2]$ permet donc de définir $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (construction de suite récurrente) avec $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$.

b) Soit $n \geq 1$. D'après a), on a $v_n \geq \frac{3}{2}$ et $v_{n-1} \geq \frac{3}{2}$, donc :
$|v_{n+1} - v_n| = |f(v_n) - f(v_{n-1})| = \frac{1}{v_n}\frac{1}{v_{n-1}}\left|\frac{1}{v_{n-1}} - \frac{1}{v_n}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |v_n - v_{n-1}|$
puis $|v_{n+1} - v_n| \leq \frac{4}{9}\,|v_n - v_{n-1}|$.

c) D'après a), l'application f décroît et $f(]0, +\infty[) \subseteq]0, +\infty[$.
Ainsi : si $0 < x \leq y$, alors $0 < f(y) \leq f(x)$, alors $0 < f(f(x)) \leq f(f(y))$.
Cela montre que $f \circ f$ est croissante.
D'après a), on a : $(\star) \quad v_2 \leq v_0 \quad$ (car $v_0 = 2$).
On a donc, en appliquant $(f \circ f)^n$: $v_{2(n+1)} \leq v_{2n}$ pour tout $n \geq 0$.
La suite $(v_{2p})_{p\geq 0}$ est donc décroissante.
En appliquant f de part et d'autre de $(\star)$, on a aussi : $(\star\star) \quad v_3 \geq v_1$.
On a donc, en appliquant $(f \circ f)^n$: $v_{2(n+1)+1} \geq v_{2n+1}$ pour tout $n \geq 0$.
La suite $(v_{2p+1})_{p\geq 0}$ est donc croissante.
Par ailleurs, d'après b) on a (avec une récurrence cachée par les points de suspension) pour tout $n \geq 1$:
$|v_n - v_{n-1}| \leq \frac{4}{9}\,|v_{n-1} - v_{n-2}| \leq (\frac{4}{9})^2\,|v_{n-2} - v_{n-3}| \leq \cdots \leq (\frac{4}{9})^{n-1}|v_1 - v_0|$.
On en déduit l'inégalité $|v_{2p+1} - v_{2p}| \leq (\frac{4}{9})^{2p}\,|v_1 - v_0|$ pour tout $p \geq 0$, ce qui montre que $v_{2p+1} - v_{2p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi les suites $(v_{2p})_{p\geq 0}$ et $(v_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont adjacentes.
On note $r \in \mathbb{R}$ leur limite commune.
Vu que $v_{2p} \geq \frac{3}{2}$ pour tout $p \geq 0$, on obtient $r \geq \frac{3}{2} > 0$ à la limite.
On récapitule : $v_{2p+1} = 1 + \frac{1}{v_{2p}}$ pour tout $p \geq 0$. À la limite : $r = 1 + \frac{1}{r}$ donc $r^2 - r - 1 = 0$ puis $r \in \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$ avec $r > 0$, enfin $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
En conclusion : les suites $(v_{2p})_{p\geq 0}$ et $(v_{2p+1})_{p\geq 0}$ convergent vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
(On pourrait en déduire que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cf. aussi d)).

d) On a vu dans la démonstration du c) que $r \geq \frac{3}{2}$ et $f(r) = r$.
Soit $n \geq 1$. D'après a), on a $v_n \geq \frac{3}{2}$, donc :
$|v_{n+1} - r| = |f(v_n) - f(r)| = \frac{1}{v_n}\frac{1}{r}\left|\frac{1}{r} - \frac{1}{v_n}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |v_n - r| = \frac{4}{9}\,|v_n - r|$.
On en déduit que pour tout $n \geq 1$ on a :
$|v_n - r| \leq \frac{4}{9}\,|v_{n-1} - r| \leq (\frac{4}{9})^2\,|v_{n-2} - r| \leq \cdots \leq (\frac{4}{9})^n\,|v_0 - r|$.
Pour obtenir $|v_n - r| \leq \frac{1}{1000}$, il suffit donc d'avoir $(\frac{4}{9})^n\,|v_0 - r| \leq \frac{1}{1000}$.
Or on a $v_0, r \in [\frac{3}{2}, 2]$, ce qui donne $(\frac{4}{9})^n\,|v_0 - r| \leq (\frac{4}{9})^n\,\frac{1}{2} \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$.
Finalement, comme $2^{10} = 1024$, on a : $|v_n - r| \leq \frac{1}{1000}$ dès que $n \geq 9$.