12) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. On considère la suite « de Cesàro » $(c_n)_{n\geq 1}$ définie par $c_n = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$.

Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Indication : commencer par $\ell = 0$.

Cas $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$?

Démonstration

• On se place ici dans le cas où $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Dans l'expression de c_n, on est capable de contrôler le comportement de u_k pour « k assez grand ». Le nombre fini de termes restants ne posera pas de problème car on le divise par n...

Par hypothèse, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il existe donc $N \geq 1$ tel que : $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $n \geq N$.

On a donc, pour tout $n \geq N$:

$$|c_n| = \left|\frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n} + \frac{u_N+\ldots+u_n}{n}\right| \leq \left|\frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n}\right| + \frac{|u_N|+\ldots+|u_n|}{n} \leq \left|\frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n}\right| + \frac{n\frac{\varepsilon}{2}}{n}.$$

Par ailleurs, à N fixé, on a : $\frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il existe donc $M \geq 1$ tel que : $\left|\frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $n \geq M$.

Finalement : $|c_n| \leq \left|\frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. dès que $n \geq \max(M, N)$.

Cela montre que : $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• On se place dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. On pose : $u'_n = u_n - \ell$ pour $n \geq 1$.

On constate que : $c_n = \frac{(u'_1+\ell)+\ldots+(u'_n+\ell)}{n} = \frac{u'_1+\ldots+u'_n}{n} + \ell$ avec $u'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'étude du cas «$\ell = 0$ » permet d'en déduire que : $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

• On se place dans le cas où $\ell = +\infty$. Soit $A > 0$.

Par hypothèse, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il existe donc $N \geq 1$ tel que : $u_n > 2A$ dès que $n \geq N$.

On a donc, pour tout $n \geq N$:

$$c_n \geq \frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n} + \frac{u_N+\ldots+u_n}{n} \geq \frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n} + \frac{2(n-N+1)A}{n}.$$

Par ailleurs, à N fixé, on a : $\frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n} + \frac{2(n-N+1)A}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2A$.

Il existe $M \geq 1$ tel que : $\left|\frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n} + \frac{2(n-N+1)A}{n} - 2A\right| < A$ dès que $n \geq M$.

En particulier : $2A - A < \frac{u_1+\ldots+u_{N-1}}{n} + \frac{2(n-N+1)A}{n}$ dès que $n \geq M$.

Finalement : $c_n > A$. dès que $n \geq \max(M, N)$.

Cela montre que : $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

• On se place dans le cas où $\ell = -\infty$. On pose : $u'_n = -u_n$ pour $n \geq 1$.

On constate que : $c_n = -\frac{u'_1+\ldots+u'_n}{n}$ avec $u'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

L'étude du cas «$\ell = +\infty$ » permet d'en déduire que : $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.