14) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont-ils des voisinages de 0 ?

a) $A = [0, +\infty[$; b) $B = \left]-\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\right[\cup]1000, +\infty[$; c) $C = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 > 0\}$; e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 5x^2 + 4 > 0\}$.

Démonstration

Par définition, une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de 0 si elle contient un intervalle $]a, b[$ avec $a < 0 < b$.

a) On suppose, par l'absurde, que A est un voisinage de 0.

Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < 0 < b$ et $]a, b[\subseteq A$.
En particulier, comme $a < \frac{a}{2} < 0 < b$, on a : $\frac{a}{2} \in A$ <u>contradiction</u>.

Ainsi : A n'est pas un voisinage de 0.