15) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont-ils des voisinages de $+\infty$?

$$U = [0, +\infty[\setminus \mathbb{N}\,; \quad V = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 < 0\}\,; \quad W = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 5x^2 + 4 > 0\}.$$

Démonstration

Par définition, une partie V de $\mathbb{R}$ est — trace d'un — voisinage de $+\infty$ si elle contient un intervalle $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

u) On suppose, par l'absurde, que U est un voisinage de $+\infty$.

Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tels que $]a, +\infty[\subseteq U$.
En particulier, comme $a < \mathrm{E}(a) + 1$, on a : $\overbrace{\mathrm{E}(a) + 1}^{\in \mathbb{N}} \in U$ <u>contradiction</u>.

Ainsi : U n'est pas un voisinage de $+\infty$.