19) Soit f, g les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $f(0)=0\,,\ f(x)=x\left|\sin\frac{1}{x}\right|$ et $g(0)=0\,,\ g(x)=1$ pour tout $x\in[0,1]$.

a) Calculer les limites de f et g en 0^+.

b) Montrer que $g\circ f$ est une application bien définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Trouver deux suites $(u_n),(v_n)$ dans l'intervalle $]0,1]$ telles que :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}(g\circ f)(u_n) \neq \lim_{n\to\infty}(g\circ f)(v_n).$$
La fonction $g\circ f$ admet-elle une limite en 0^+ ?

c) Relire dans le cours le théorème sur les limites de fonctions composées.
Quelle hypothèse de ce théorème est ici en défaut ?

Démonstration

a) Pour tout $x\in[0,1]$, on a : $0\leq f(x)\leq x$.
Donc : $f(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par le théorème des gendarmes.
Pour tout $x\in\,]0,1]$, on a : $g(x)=1$. D'où : $g(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

b) Pour tout $x\in[0,1]$, on a : $0\leq f(x)\leq 1$.
Donc : $f([0,1])\subseteq[0,1]$ puis $g\circ f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$.
On constate que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}=0$ avec $\frac{1}{2\pi n},\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\in]0,1]$.
Mais $\lim\limits_{n\to\infty}(g\circ f)(\frac{1}{2\pi n})=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(g\circ f)(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}})=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.
Ainsi $(g\circ f)(x)$ n'a donc pas de limite quand $x\to 0^+$.

c) <u>Rappel</u>
Soient $g\colon \underset{\text{partie de }\mathbb{R}}{E}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $f\colon \underset{\text{partie de }\mathbb{R}}{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $f(D)\subseteq E$.
Si $f(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} k\in\mathbb{R}$ avec $f(x)>k$ pour $x\in D$ et $g(y)\underset{y\to k^+}{\longrightarrow} l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$,
alors $g(f(x))\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} l$.
L'hypothèse manquante ici est : « $f(x)>0$ pour tout $x\in[0,1]$ ».