2) On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$A = \{(-1)^n + \frac{1}{n}\ ;\ n \geq 1\}$, $B = \{xy\ ;\ x, y \in \mathbb{R}$ et $|x| + |y| \leq 1\}$, $C = \{\sin\left(k\frac{\pi}{7}\right)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$D = \left\{\frac{3n-1}{2n+3}\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $E = \left\{\frac{3n-1}{2n+3}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$ et $n \geq -2\right\}$.

Montrer qu'elles admettent une borne supérieure et une borne inférieure.

Calculer ces bornes supérieures et inférieures. Appartiennent-elles à la partie ?

Démonstration

Il est utile de faire un dessin lorsque la situation est simple à dessiner. C'est le cas pour A et B.

(a) On a : $A = A' \cup A''$ où $A' = \{-1 + \frac{1}{2p+1}\ ;\ p \geq 0\}$ et $A'' = \{1 + \frac{1}{2q}\ ;\ q \geq 1\}$.

On a : A' est formé des termes d'une suite décroissante de 0 à -1, sans prendre la valeur -1.

On a aussi : A'' est formé des termes d'une suite décroissante de $\frac{3}{2}$ à 1, sans prendre la valeur 1.

Les minorants m' de A vérifient donc pas passage à la limite : $m' \leq -1$. Comme -1 est minorant de A : $\inf A = -1$, avec $-1 \notin A$.

Les majorants m'' de A vérifient : $m'' \geq \frac{3}{2}$.

Comme $\frac{3}{2}$ est dans A : $\sup A = \frac{3}{2}$, avec $\frac{3}{2} \in A$.

(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| + |y| \leq 1$.

On a : $|xy| = |x||y| \leq |x|(1 - |x|)$ avec $0 \leq |x| \leq 1 - |y| \leq 1$, donc $|x| \in [0, 1]$.

Une étude de variations montre que $t(1-t)$ décrit $[0, \frac{1}{4}]$ lorsque t décrit $[0, 1]$.

Par conséquent : $xy \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Cela montre que $B \subseteq [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

De plus, avec $x = \frac{1}{2}$ et $y = \mp\frac{1}{2}$, on obtient $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \in B$.

Finalement $\inf B = -\frac{1}{4}$, $\sup B = \frac{1}{4}$, et $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \in B$.

(c) L'application sinus est impaire et 2π-périodique.

Donc $C = \{\pm\sin\left(k\frac{\pi}{7}\right)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq k \leq 7\}$.

On sait aussi que sinus croît sur $[0, \frac{\pi}{2}$ et décroît sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Ainsi, comme $0 < \frac{3\pi}{7}\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{7} < \pi$ et $\sin(\frac{4\pi}{7}) = \sin(\frac{3\pi}{7})$ car $\frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7}$, l'ensemble fini C a pour plus petit élément $-\sin(\frac{3\pi}{7})$ et pour plus grand élément $\sin(\frac{3\pi}{7})$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. On a la décomposition en éléments simples :

$\frac{3x-1}{2x+3} = \frac{\frac{3}{2}(2x+3) - \frac{11}{2}}{2x+3} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{11}{2}}{2x+3}$.

Il en résulte que D est formé des termes d'une suite croissante de $-\frac{1}{3}$ à $\frac{3}{2}$, sans prendre la valeur $\frac{3}{2}$.

On en déduit comme au (a) que : $\inf D = -\frac{1}{3}$, avec $-\frac{1}{3} \in D$, et $\sup D = \frac{3}{2}$, avec $\frac{3}{2} \notin D$.

(e) On a $E = D \cup \{\frac{3(-2)-1}{2(-2)+3}, \frac{3(-1)-1}{2(-1)+3}\} = D \cup \{7, -4\}$.

D'après (d), on a : $D \subseteq [-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}[$.

Ainsi : $\inf E = -4$, avec $-4 \in E$, et $\sup E = 7$, avec $7 \in E$.