23) Calculer les limites des fonctions suivantes :

a) $\sqrt{1+x^2}-x \quad (x\to\pm\infty)$; b) $\frac{x-3}{x^2-3x} \quad (x\to\pm\infty)$; c) $\frac{x-3}{x^2-3x} \quad (x\to 3,\ x\neq 3)$;

d) $\frac{x\sin x}{1-\cos x} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$; e) $\frac{\tan x-\sin x}{x^3} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$; f) $\frac{\ln(1+x^2)}{\cos x-1} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$;

g) $\frac{\sin^2 x+1-\cos x}{x^2} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$; h) $\frac{\tan^2 x}{\sqrt{1-\cos x}} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$; i) $\frac{\sin 3x}{1-2\cos x} \quad (x\to \frac{\pi}{3},\ x\neq \frac{\pi}{3})$;

j) $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+x^2}} \quad (x\to 0^+)$; k) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1} \quad (x\to \mathrm{e},\ x\neq \mathrm{e})$; l) $\sqrt{x^4+x-2}-x^2+1 \quad (x\to\pm\infty)$;

m) $\frac{\operatorname{ch} 2x-\operatorname{ch} x}{\sin^2 x} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$; n) $(\cos x)^{\operatorname{th}^{-2} x} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$; o) $(\operatorname{ch} x)^{\operatorname{cotan}^2 x} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$;

p) $\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} \quad (x\to 1,\ x\neq 1)$; q) $\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-(3-2x)^{-1/2}}} \quad (x\to 1,\ x\neq 1)$; r) $\frac{\sqrt{1+x}-1}{(1+x)^{1/3}-1} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$;

s) $\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \quad (x\to 0,\ x\neq 0)$; t) $x\ln(\sin x) \quad (x\to 0^+)$.

Démonstration

Dans ces calculs de limites un peu excentriques, les outils sont :
- l'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;
- les formules trigonométriques ;
- le lien entre la limite d'un taux d'accroissements et la dérivée.

Par la suite on aura des outils plus efficaces. Donc : inutile de tout traiter...

a) On pose : $a(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ pour $x\in\mathbb{R}$.

On a : $\sqrt{1+x^2}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et $-x\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty$, donc $a(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Du coté de $+\infty$, on utilise le fait que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$a(x)=\sqrt{1+x^2}-x=\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x},$$

donc $a(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

d) On pose : $d(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ pour $x\in]-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.

Il y a mille façons d'obtenir le résultat (*) mais les outils les plus adaptés sont les « développements limités » qui seront vus en L2.

Ici on se débrouille avec le moyens du bord. Pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$, on a :

$$d(x)=\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}=\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}-\sin 0}{x-0}}$$

donc $d(x)\underset{x\to 0,\ x\neq 0}{\longrightarrow}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin\frac{x}{2})|_{x=0}}=2$.

(*) **« Règle de (De) l'Hôpital »**

Soient $f,g\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ avec $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et $a<b$. On suppose que :

(i) $\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\(\text{resp. } x\to b^-)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\(\text{resp. } x\to b^-)}} g(x)=0$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\(\text{resp. } x\to b^-)}} |f(x)|=\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\(\text{resp. } x\to b^-)}} |g(x)|=+\infty$. Alors : $\frac{f(x)}{g(x)}\underset{\substack{x\to a^+\\(\text{resp. } x\to b^-)}}{\longrightarrow} l$.

(ii) f et g sont dérivables, et g' ne s'annule pas ;

(iii) $\frac{f'(x)}{g'(x)}\underset{\substack{x\to a^+\\(\text{resp. } x\to b^-)}}{\longrightarrow} l$ pour un certain $l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.