25) Prolongements par continuité.

a) Montrer que la fonction $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité en 0.

b) La fonction définie par $g(x) = \frac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?

Démonstration

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

On rappelle qu'un prolongement par continuité de f en 0 est une application $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui prolonge f (c'est-à-dire $\widetilde{f}(x) = f(x)$ quand $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) et qui est continue en 0. Quelle valeur de $\widetilde{f}(0)$ choisir ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a : $0 \leq |f(x)| \leq |x|$.
Donc : $f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$ par le théorème des gendarmes.

On obtient ainsi un prolongement par continuité de f en 0 en posant $\widetilde{f}(0) = 0$, ou plus concrètement bien que cela soit un peu abusif : « $f(0) = 0$ ».

b) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a donc :

$$g(x) = -(x^2 - 2x + 4) \text{ si } x < -2 \text{ et } g(x) = x^2 - 2x + 4 \text{ si } x > -2$$

Par conséquent : $g(x) \underset{x\to -2^-}{\longrightarrow} -12$ et $g(x) \underset{x\to -2^+}{\longrightarrow} 12$.

Comme $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$, la fonction g n'a pas de prolongement par continuité en -2.