4) En utilisant la définition de limite, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{2n-1}{3n+1} = \tfrac{2}{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1} - n = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 - n\sin n) = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n = 0$$

Démonstration

(a) On pose : $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$, $n \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

On constate que pour tout $n \geq 0$, on a :

$a_n - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3(3n+1)}$, donc $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{5}{3(3n+1)} \leq \frac{5}{9n}$.

Par ailleurs : $\frac{5}{9n} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{9\varepsilon}$.

En notant E la fonction partie entière, on pose donc $N = \mathrm{E}(\frac{5}{9\varepsilon}) + 1$.

On a par définition de la partie entière : $\mathrm{E}(\frac{5}{9\varepsilon}) \leq \frac{5}{9\varepsilon} < \mathrm{E}(\frac{5}{9\varepsilon}) + 1$.

On obtient : si $n \geq N$, alors $n > \frac{5}{9\varepsilon}$, alors $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{5}{3(3n+1)} < \varepsilon$.

En conclusion : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$.

(b) On pose : $b_n = \sqrt{n-1} - n$, $n \geq 1$. Soit $A > 0$.

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$b_n = n(\sqrt{\frac{n-1}{n^2}} - 1) = n(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}_{\leq \sqrt{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ quand } n \geq 2} - 1)$ puis $b_n \leq n(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}_{<0})$ quand $n \geq 2$.

Par ailleurs : $n(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1) < -A \iff n > \frac{A}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

En tenant compte de la condition $n \geq 2$, on pose : $N = \max\left(\mathrm{E}(\frac{A}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}) + 1, 2\right)$.

Cela fournit : si $n \geq N$, alors $n > \frac{A}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ et $n \geq 2$, alors $b_n < -A$.

D'où : $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(c) On pose : $c_n = n^2 - n\sin n$, $n \geq 0$. Soit $A > 0$.

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$c_n = n^2(1 - \frac{\sin n}{n})) \leq n^2(1 - \frac{1}{2}))$ quand $n \geq 2$.

Par ailleurs : $\frac{n^2}{2} > A \iff n > \sqrt{2A}$.

Au moyen de $N := \max\left(\mathrm{E}(\sqrt{2A}) + 1, 2\right)$, on obtient :

$c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(d) On pose : $d_n = \sqrt{n^2-1} - n$, $n \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$d_n = n\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1\right) = n\,\frac{(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1)(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1} = -\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}$,

donc $|d_n| \leq \frac{(\frac{1}{n})}{1}$.

Par ailleurs : $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Il reste à poser $N := \mathrm{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$ pour obtenir :

$d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.