5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$.
2. Montrer que si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. La réciproque du 1 est-elle vraie ?

Démonstration

1. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$|u_n - l| < \varepsilon$; dès que $n \geq N$.

Or $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$ pour tout $n \geq 0$.

Si $n \geq N$, on a donc : $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| < \varepsilon$.

On peut en conclure que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$.

2. On suppose que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$||u_n| - 0| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$.

Cela signifie que :
$|u_n| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$.

Autrement dit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On pose : $u_n = -1$ pour tout $n \geq 0$ et $\ell = 1$.

Par définition de la limite d'une suite (avec $N = 0$), on a :
$|u_n| = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = |\ell|$ et $u_n = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

L'unicité de la limite d'une suite converge permet d'en déduire que :
$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \ell$ donc la réciproque du 1 n'est pas vraie.