6) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ ;
(ii) Si $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente ;
(iii) Si $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ ;
(iv) Si $(u_{2n})_{n\geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$ sont convergentes alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Démonstration

(i) Vrai.

On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

On remarque que les suites $(2n)_{n\geq 0}$ et $(2n+1)_{n\geq 0}$ sont strictement croissantes dans $\mathbb{N}$. Les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont donc extraites de $(u_n)_{n\geq 0}$.

D'après le cours, on en déduit que : $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ.

(ii) Faux.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0} \overset{\text{déf}}{=} ((-1)^n)_{n\geq 0}$.

On a : $u_{2n} = ((-1)^2)^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2n+1} = (-1).((-1)^2)^n = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ, puis on déduit des calculs explicites des limites de ces suites extraites que : $\ell = 1$ et $\ell = -1$, ce qui est incorrect.

L'implication proposée est donc fausse.

(iii) Vrai.

On suppose que $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $P, Q \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|u_{2p} - \ell| < \varepsilon \text{ dès que } p \geq P \quad \text{et} \quad |u_{2q+1} - \ell| < \varepsilon \text{ dès que } q \geq Q.$$

On pose : $N = \max(2P, 2Q+1)$.

Si $n \geq N$ et n est pair, alors n est de la forme $2p$ et la condition $2p \geq 2P$ montre que $p \geq P$, puis vu ce qui précède, on a : $|u_n - \ell||u_{2p} - \ell| < \varepsilon$.

Si $n \geq N$ et n est impair, alors n s'écrit $2q+1$ et la condition $2q+1 \geq 2Q+1$ montre que $q \geq Q$, puis vu ce qui précède, on a : $|u_n - \ell||u_{2q+1} - \ell| < \varepsilon$.

Dans tous les cas, on a donc : $|u_n - \ell| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$.

En conclusion : $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

(iv) Vrai.

On suppose que :

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} k_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} k_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad u_{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que $k_0 = \lim\limits_{p\to+\infty} u_{6p} = \ell$ car $(u_{6p})_{p\geq 0} = (u_{2.(3p)})_{p\geq 0}$ est extraite de $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{6p})_{p\geq 0} = (u_{3.(2p)})_{p\geq 0}$ est extraite de $(u_{3n})_{n\geq 0}$.

On en déduit aussi que $k_1 = \lim\limits_{p\to+\infty} u_{6p+3} = \ell$ car $(u_{6p+3})_{p\geq 0} = (u_{2.(3p)+1})_{p\geq 0}$ est extraite de $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{6p+3})_{p\geq 0} = (u_{3.(2p+1)})_{p\geq 0}$ est extraite de $(u_{3n})_{n\geq 0}$.

Par conséquent : $k_0 = k_1 = \ell$. D'après (iii) : $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.