8) Étudier les limites des suites suivantes :

a) $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \geq 1$ ; b) $b_n = \sqrt{n} + (-1)^n,\ n \geq 0$ ;

c) $c_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n},\ n \geq 0$ ; d) $d_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ n \geq 0$ ;

e) $e_n = \frac{2-(-1)^n}{n+\cos n},\ n \geq 0$ ; f) $f_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2},\ n \geq 1$ ;

g) $g_n = \tan n,\ n \geq 0$, en utilisant une relation de récurrence (on admet que $\pi \notin \mathbb{Q}$).

Démonstration

a) Par l'absurde, on suppose que : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On a donc : $a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Or : $a_{2n} = \frac{1}{2n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

D'où : $-1 = \ell = 1$ *contradiction !*

En conclusion : $(a_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

b) On a : $b_n = \sqrt{n}(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ avec $0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Le théorème des gendarmes donne ensuite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) On a : $c_n = \frac{(\frac{2^n-3^n}{3^n})}{(\frac{2^n+3^n}{3^n})} = \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

d) Par l'absurde, on suppose que : $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On a donc : $d_{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $d_{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Or : $d_{4n} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $d_{4n+1} = \frac{4n+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'où : $0 = \ell = +\infty$ *contradiction !*

En conclusion : $(d_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

e) D'abord, $(e_n)_{n\geq 0}$ est définie car : $0 + \cos 0 = 1$, $1 + \cos 1 > 1$ $(0 \leq 1 \leq \frac{\pi}{2})$, et $n + \cos(n) \geq n - 1 > 0$ pour tout $n \geq 1$.

Ensuite : $e_n = \frac{(\frac{2-(-1)^n}{n})}{(1+\frac{\cos n}{n})}$ avec $0 \leq \left|\frac{2-(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{3}{n}$ et $0 \leq \left|\frac{\cos n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$.

Par le théorème des gendarmes : $\frac{2-(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\cos n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $e_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

f) Attention : une somme de $n$ termes dépendant de $n$ dont chacun a une limite nulle (par exemple $\frac{1}{n}$) n'a aucune raison d'avoir une limite nulle.

On a : $f_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

g) La suite $(g_n)_{n\geq 0}$ est définie car aucun élément de $\mathbb{N}$ n'est un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$ (puisque $\pi \notin \mathbb{Q}$).

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$g_{n+1} = \frac{\sin(n+1)}{\cos(n+1)} = \frac{\sin(n)\cos(1)+\cos(n)\sin(1)}{\cos(n)\cos(1)-\sin(n)\sin(1)} = \frac{\frac{\sin(n)\cos(1)+\cos(n)\sin(1)}{\cos n}}{\frac{\cos(n)\cos(1)-\sin(n)\sin(1)}{\cos n}} = \frac{g_n \cos 1 + \sin 1}{\cos 1 - g_n \sin 1}.$$

Pour la suite du calcul, on a besoin de remarquer que la suite $(g_{n+1})_{n\geq 0}$ est extraite de la suite $(g_n)_{n\geq 0}$.

Si $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors en passant à la limite dans l'égalité

$$g_{n+1}(\cos 1 - g_n \sin 1) = g_n \cos 1 + \sin 1,$$

on en déduit que $\ell^2 = -1$ *contradiction !*

Si $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \{-\infty, +\infty\}$, alors en passant à la limite dans l'égalité

$$g_{n+1} = \frac{\cos 1 + \frac{\sin 1}{g_n}}{\frac{\cos 1}{g_n} - \sin 1},$$

on en déduit que $\ell = -\frac{\cos 1}{\sin 1}$ *contradiction !*

Par conséquent : $(g_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.