15) Résoudre l'équation $(H)\quad y''+y'-2y=0$ d'inconnue $y\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable.
Indication : fixer $r\in\mathbb{R}$ tel que $y_H\colon x\mapsto \mathrm{e}^{rx}$ est solution de (H), puis poser $z:=y_H^{-1}\,y$ et $u:=z'$.

Démonstration

• On commence par choisir un réel r qui convienne. On a avec $y_H(x):=\mathrm{e}^{rx}$:
$y_H''+y_H'-2y_H=0 \iff (\forall x\in\mathbb{R}\quad (r^2+r-2)\underbrace{\mathrm{e}^{rx}}_{\neq 0}=0) \iff r^2+r-2=0.$

On prend par exemple $r=1$, ce qui donne : $y_H(x)=\mathrm{e}^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

• Ensuite, on poursuit le calcul en posant $y=y_H\,z$ où $z:=y_H^{-1}\,y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable et en utilisant le fait que y_H vérifie (H). On obtient :
$y'=\ y_H'\,z+y_H\,z'$ puis $y''=\ y_H''\,z+2y_H'\,z'+y_H\,z''$ donc
$y''+y'-2y=0 \iff \underbrace{(y_H''+y_H'-2y_H)}_{0}\,z+(2y_H'+y_H)\,z'+y_H\,z''=0.$

On pose $u:=z'$ et poursuit le calcul en obtenant u puis sa primitive z :
$y''+y'-2y=0 \iff u'=-\big(2\frac{y_H'}{y_H}+1\big)\,u \iff u'=-3u$
$\iff (\exists\lambda\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad u(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-3x})$
$\iff \big(\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad z(x)=-\frac{\lambda}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}+\mu\big)$
$\iff \big(\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad y(x)=\mathrm{e}^x\,(-\frac{\lambda}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}+\mu)\big).$

Quitte à renommer la constante $-\frac{\lambda}{3}$ en λ, on en déduit que :
les solutions de (H) sont les applications $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-2x}+\mu\,\mathrm{e}^x$ où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Remarque

Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On note r_1 et r_2 les racines de X^2+aX+b dans $\mathbb{C}$.

Plus généralement, on obtient de même que l'équation $(H)\ \ y''+ay'+by=0$ d'inconnue $y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable a pour solutions :
– $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{r_1x}+\mu\,\mathrm{e}^{r_2x}$ où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, quand $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ et $r_1\neq r_2$;
– $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{r_1x}+\mu\,x\,\mathrm{e}^{r_1x}$ où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, quand $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ et $r_1=r_2$;
– $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)+\mu\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$ où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, quand $r_1\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $r_2=\overline{r_1}$, on posant $r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Dans le dernier cas, il faut d'abord chercher les solutions $y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ deux fois dérivables de (H) puis parmi elles trouver les solutions à valeurs réelles.

Résumé de cours sur les équations différentielles

On se donne un intervalle ouvert non-vide I et $a,b\in\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On cherche à résoudre une équation différentielle $(L) : y''+ay'+by=c(x)$ d'inconnue $y\colon I\to\mathbb{K}$ deux fois dérivable, où $c\colon I\to\mathbb{K}$ est continue.
L'*équation homogène associée à* (L) est $(H) : y''+ay'+by=0$. On a :
$\boxed{\{\text{solutions de }(L)\}=\{\text{solutions de }(H)\}+y_P}$ où $y_P : I\to\mathbb{K}$ vérifie (L).

Définition

L'*équation caractéristique* associée à (H) est l'équation $r^2+ar+b=0$ d'inconnue $r\in\mathbb{C}$. Il s'agit de la condition nécessaire et suffisante pour que $x\mapsto\mathrm{e}^{rx}$ soit solution de (H) sur $\mathbb{C}$.

Proposition

On note r_1 et r_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de son équation caractéristique.
(a) Les solutions de (H) sont les applications $\lambda\varphi+\mu\psi$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, où :
– si $r_1,r_2\in\mathbb{K}$: $\varphi(x)=\mathrm{e}^{r_1x}$ et $\psi(x)=\begin{cases}\text{ou } \mathrm{e}^{r_2x} & \text{si } r_2\neq r_1\\ \text{ou } x\mathrm{e}^{r_1x} & \text{si } r_2=r_1\end{cases}$.
– $\underbrace{\text{sinon}}_{\mathbb{K}\overset{\text{ici}}{=}\mathbb{R}}$: $\varphi(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $\psi(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$ où $r_1=\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\alpha}}+\mathrm{i}\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\beta}}$ et $r_2=\overline{r_1}$.
(b) Soient $P\in\mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$ de degré d et $\gamma\in\mathbb{C}$. L'équation différentielle $(L) : y''+ay'+by=P(x)\,\mathrm{e}^{\gamma x}$ a une solution (unique) $y_P : x\mapsto Q(x)x^m\,\mathrm{e}^{\gamma x}$ avec $Q\in\mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$ de degré d et $m=\begin{cases}\text{ou } 0 & \text{si } \gamma\notin\{r_1,r_2\}\\ \text{ou } 1 & \text{si } \gamma\in\{r_1,r_2\} \text{ et } r_1\neq r_2\\ \text{ou } 2 & \text{si } \gamma=r_1=r_2\end{cases}$.

Exemple

On considère $(L) : y''-y=\mathrm{e}^x$, où $y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est deux fois dérivable.
• Solutions de l'équation homogène $(H) : y''-y=0$?
Équation caractéristique : $r^2-1=0$. On pose : $r_1=1$ et $r_2=-1$.
Les solutions de (H) sont les applications $y : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^x+\mu\,\mathrm{e}^{-x}\end{array}$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
• Solution particulière de (L) ?
Ici $P=1$ avec $d=0$, et, $\gamma=1$ avec $m=1$. En posant $y(x)=\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\alpha}}\,x\,\mathrm{e}^x$, on a :
$y''-y=\mathrm{e}^x \iff \forall x\in\mathbb{R}\quad 2\alpha\,\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x.$
On choisit donc $\alpha=\frac{1}{2}$ et obtient la solution $y_P : x\mapsto\frac{x}{2}\mathrm{e}^x$ de (L).
• Les solutions de (L) sont donc : $y : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^x+\mu\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{x}{2}\mathrm{e}^x\end{array}$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.