29) a) Calculer $\int_0^1 \arcsin x \, \mathrm{e}^{\arccos x} \, \mathrm{d}x$.

b) Calculer $\int_0^3 x\sqrt{1+x} \, \mathrm{d}x$ (utiliser le changement de variable $u = \sqrt{1+x}$).

c) Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{3/2}}$ (utiliser le changement de variable $t = \tan(x)$).

Démonstration

a) On pose : $x = \cos y$, avec $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

On a : $x = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$ avec $\frac{\pi}{2} - y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\mathrm{d}x = -\sin y \, \mathrm{d}y$, puis

$\int_0^1 \arcsin x \, \mathrm{e}^{\arccos x} \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\frac{\pi}{2} - y) \, \mathrm{e}^y \, (-\sin y \, \mathrm{d}y) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y - \frac{\pi}{2}) \, \mathrm{e}^y \sin y \, \mathrm{d}y.$

On pourrait calculer à part $\int \mathrm{e}^y \sin y \, \mathrm{d}y$ sous la forme $v(y) + \mathrm{cte}$ à l'aide de deux intégrations par parties successives (astuce classique) ce qui donnerait $v(y) = \frac{1}{2}(\sin y - \cos y) \, \mathrm{e}^y + \mathrm{cte}$, puis faire une intégration par parties pour calculer notre intégrale.

Mais il est préférable d'utiliser l'égalité $\sin y = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})$ et d'intégrer par parties des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$\int_0^1 \arcsin x \, \mathrm{e}^{\arccos x} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{Im}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y - \frac{\pi}{2}) \, \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})y} \, \mathrm{d}y \right)$

$= -\mathrm{Im}\left(\left[(y - \frac{\pi}{2}) \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})y}}{1+\mathrm{i}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})y}}{(1+\mathrm{i})^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$