3) Soient $J = [a, b]$ un segment et $f : J \to J$ une application continue.
Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in J$ vérifiant $f(x_0) = x_0$.
Indication : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

DÉMONSTRATION

On rappelle qu'on appelle *point fixe de* f un élément x de l'ensemble de définition de f tel que $f(x) = x$.

On pose : $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in [a, b]$.
Les points fixes de f sont donc les points où g s'annule.

L'application $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue.
On a par hypothèse : $f(a) \in J$ et $f(b) \in J$, donc $a \leq f(a) \leq b$ et $a \leq f(b) \leq b$, puis $0 \leq f(a) - a \leq b - a$ et $a - b \leq f(b) - b \leq 0$, en particulier $g(b) \leq 0 \leq f(a)$.

On applique le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g :

il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

En conclusion : f admet pour point fixe c.