34) a) Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Calculer $\int \frac{x^5+x^4+x^2+1}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

c) Calculer sur un intervalle : $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Démonstration

a) On considère : $F = \dfrac{1}{X^3+1}$.

On a : $\underbrace{X^3+1}_{\text{s'annule en } -1} = (X+1)(\underbrace{X^2+\ ?\ }_{X^2-X+1})$ avec X^2-X+1 sans racine réelle.

On admet qu'il existe $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ uniques tels que :

$$\underbrace{\frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)}}_{F} = \frac{\lambda}{X+1} + \frac{\mu X+\nu}{X^2-X+1}.$$

On pourrait réduire le membre de droite au même dénominateur, puis identifier les coefficients des numérateurs. On peut aussi remplacer X par x puis utiliser les astuces suivantes :

– on multiplie par $x+1$ et passe à $x\to -1$ avec $x\neq -1$: $\lambda = \frac{1}{3}$;

– on prend $x=0$: $1=\lambda+\nu$, donc $\nu=\frac{2}{3}$;

– on multiplie par x et passe à $x\to+\infty$: $0=\lambda+\mu$, donc $\mu=-\frac{1}{3}$.

(Au lieu d'utiliser les valeurs 0 et $+\infty$, on aurait aussi pu prendre une valeur complexe non-réelle, par exemple $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ après avoir multiplié par x^2-x+1, et admettre que deux fonctions rationnelles complexes sont égales dès qu'elles sont égales aux points réels où elles sont définies.)

En conclusion : $F = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}}{X^2-X+1}$.

[Sans admettre l'existence de λ,μ,ν, on constate ici que l'égalité est vraie.]

On a : $\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

De plus : $\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$.

D'où : $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right) + \text{cte}$.

b) On considère : $F = \dfrac{X^5+X^4+X^2+1}{X^3-X^2-X+1}$.

On a : $\underbrace{X^3-X^2-X+1}_{\text{s'annule en } 1} = (X-1)(X^2+0X-1) = (X+1)\,(X-1)^2$.

On admet qu'il existe $E\in\mathbb{R}[X]$ de degré 2 et $a,b,c\in\mathbb{R}$ uniques tels que :

$$\underbrace{\frac{X^5+X^4+X^2+1}{(X+1)\,(X-1)^2}}_{F} = E + \underbrace{\frac{a}{X+1}}_{F_1,\text{ cf. (b)}} + \underbrace{\frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1}}_{F_2,\text{ cf. (b)}}.$$

On commence par calculer les 3 coefficients de E :

$$\begin{array}{rl|l}
 & X^5 + X^4 + 0X^3 + \cdots & X^3 - X^2 - X + \cdots \\ \cline{3-3}
\ominus & X^5 - X^4 - X^3 + \cdots & X^2 + 2X + 3 \\ \cline{2-2}
= & 2X^4 + X^3 + \cdots & \\
\ominus & 2X^4 - 2X^3 + \cdots & \\ \cline{2-2}
= & 3X^3 + \cdots & \\
 & // \ // \ // &
\end{array}$$

donc $E = X^2+2X+3$.

On remplace X par x, multiplie par $x+1$ et passe à $x\to-1$ avec $x\neq-1$: $a=\frac{1}{2}$.

On continue en généralisant cette technique et choisissant une autre valeur particulière :

– on multiplie par $(x-1)^2$ et passe à $x\to 1$ avec $x\neq 1$: $b=2$;

– on prend $x=0$: $1 = 3+a+b-c$, donc $c=\frac{9}{2}$.

En conclusion : $F = X^2+2X+3+\frac{\frac{1}{2}}{X+1}+\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{\frac{9}{2}}{X-1}$.

[Sans admettre l'existence de E,a,b,c, on constate ici que l'égalité est vraie.]

On a : $\frac{x^5+x^4+x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = x^2+2x+3+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-1}$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

D'où : $\int\frac{x^5+x^4+x^2+1}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+x^2+3x+\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{2}{x-1}+\frac{9}{2}\ln|x-1|+\text{cte}$.

c) Non corrigé.